STRATEGIE
Errata Corrige

Pag. 257 riga 10
Errata: la *forma estesa*, o *ad albero*, in cui si evidenzia la sequenza delle decisioni dei giocatori nelle possibili fasi del gioco (es. supermercati); la *forma normale*, o *strategica*, in cui si suppone che tutti i giocatori effettuino all'inizio del gioco tutte le loro decisioni prevedendo tutti i possibili sviluppi del gioco (es. offerte in busta chiusa);
Corrige: la *forma normale*, o *strategica*, in cui si suppone che tutti i giocatori effettuino all'inizio del gioco tutte le loro decisioni prevedendo tutti i possibili sviluppi del gioco (es. offerte in busta chiusa); la forma *estesa*, o ad *albero*, in cui si evidenzia la sequenza delle decisioni dei giocatori nelle possibili fasi del gioco (es. supermercati);

Pag. 259 riga 7
Errata: Dal loro sodalizio nasce, in (1944), il volume destinato a dare una svolta signicativa agli studi economici.
Corrige: Dal loro sodalizio nasce il volume destinato a dare una svolta signicativa agli studi economici (1944).

Pag. 262 riga 2
Errata: Jean Tirole nel 2014. Undici Nobel in ventun anni.
Corrige: Jean Tirole nel 2014, Robert B. Wilson e Paul R. Milgrom nel 2020. Tredici Nobel in ventisette anni.

Pag. 262 riga 11 dal basso
Errata: Per l'anno successivo (2019) si è già prenotata la Finlandia.
Corrige: Nel 2019 si è aggregata la Finlandia.

Pag. 274 riga 9 dal basso: inserire la nota seguente.
Nota: V'è un altro concetto di soluzione, basato sull'eliminazione progressiva di strategie dominate, che qui non presenteremo.

Pag. 275, Tabella 13.8.
Errata: Tabella 13.8: Gioco banale.
Corrige: Tabella 13.8: Gioco a due giocatori con due strategie.

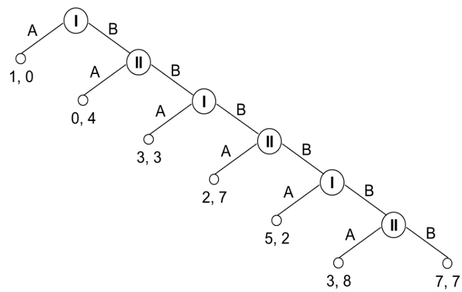
Pag. 289 righe 13-15
Errata: escludere le dominanze partendo prima da quelle in orizzontale e ripetendo poi l'operazione partendo da quelle in verticale;
Corrige: togliere l'intero capoverso.

Pagg. 293-349: il Capitolo 14 va sostituito con quello riportato di seguito.

A partire dal capitolo 15 (pag. 357) la numerazione di ogni pagina diminuisce di sei unità (cioè riparte da 351). Ciò si riflette sull'Indice e sull'Indice Analitico.

Pag. 360 riga 9 dal basso
Errata: In questo modo con la tecnica della strada a ritroso il gioco dovrebbe interrompersi al secondo passo con il giocatore I che prende 0 e il giocatore II che prende 4; oppure, se il giocatore I non vuol far vincere nulla neanche al giocatore II, il gioco si interrompe addirittura alla prima mossa; questa è la soluzione competitiva del gioco.
Corrige: In questo modo con la tecnica della strada a ritroso il gioco dovrebbe interrompersi addirittura alla prima mossa con il giocatore I che prende 1 e il giocatore II che prende 0; questa è la soluzione competitiva del gioco.

Pag. 361, sostituire la figura con quella sotto riportata.



Pag. 375 riga 14
Errata: Osserviamo che nei Giochi a somma costante, vale $S \cup R = N$ e $S \cap R = \varnothing$ e $v(S) + v(N \setminus S) = v(N)$ per ogni partizione di N.
Corrige: Osserviamo che nei Giochi a somma costante, vale $S \cup R = N$ e $S \cap R = \varnothing$ e $v(S) + v(N \setminus S) = v(N)$ per ogni partizione di N in S ed R.

Pag. 385 riga 12
Errata: Inoltre è possibile provare che entrambi tali valori sono imputazioni, perché, oltre all'efficienza, rispettano la razionalità individuale.
Corrige: Inoltre è possibile provare che, nei giochi superadditivi, entrambi tali valori sono imputazioni, perchè, oltre all'efficienza, rispettano la razionalità individuale.

Pag. 389 riga 8
Errata: Come si può facilmente vedere, nei Giochi semplici il contributo marginale...
Corrige: Come si può facilmente vedere, nei Giochi semplici monotoni il contributo marginale...

Pag. 399 riga 16, 400 righe 1 e 3, 400 riga 2 dal basso, 401 riga 2, 401 riga 1 dal basso e 404 riga 4
Errata: Nash.
Corrige: Nash-Harsanyi.

Pag. 404: sopra ESERCIZI inserire “Per la ricerca del nucleolo in questo gioco occorre utilizzare metodi numerici”.

Pag. 489: nella Bibliografia, fra Buratto e Carnap, va inserito “Carfì, D. & Gambarelli G. (2015), Balancing bilinearly interfering elements, *Decision Making in Manufacturing and Services*, 9(1), 27–49”.

Pag. 554, Figura: aggiungere la soluzione competitiva classica come indicato nella tabella corretta riportata qui sotto.

<table>
<tr><th colspan="3" rowspan="2">SOLUZIONI DEL GIOCO 6</th><th colspan="2">STRATEGIE PURE</th><th colspan="2">STRATEGIE MISTE</th><th rowspan="2">PAGAMENTI</th></tr>
<tr><th>x</th><th>y</th><th>x</th><th>y</th></tr>
<tr><td colspan="3" rowspan="2">NASH EQUILIBRI PURI (V^E)</td><td>(1, 0)</td><td>(1, 0)</td><td></td><td></td><td>(4, 4)</td></tr>
<tr><td>(0, 1)</td><td>(0, 1)</td><td></td><td></td><td>(2, 2)</td></tr>
<tr><td colspan="3">COMPET. DI MAXMIN NELLE PURE (V^M)</td><td>(0, 1)</td><td>(0, 1)</td><td></td><td></td><td>(2, 2)</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">COMPETITIVE</td><td>Classica (V^C)</td><td>(0, 1)</td><td>(0, 1)</td><td>(0, 1)</td><td>(0, 1)</td><td>(2, 2)</td></tr>
<tr><td>Minaccia (V^T)</td><td>(0, 1)</td><td>(0, 1)</td><td>(0, 1)</td><td>(0, 1)</td><td>(2, 2)</td></tr>
<tr><td rowspan="4">COOP.</td><td rowspan="2">NTU</td><td>Classica (V^{CNTU})</td><td>(1, 0)</td><td>(1, 0)</td><td>(1, 0)</td><td>(1, 0)</td><td>(4, 4)</td></tr>
<tr><td>Minaccia (V^{TNTU})</td><td>(1, 0)</td><td>(1, 0)</td><td>(1, 0)</td><td>(1, 0)</td><td>(4, 4)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">TU</td><td>Classica (V^{CTU})</td><td>(1, 0)</td><td>(1, 0)</td><td>(1, 0)</td><td>(1, 0)</td><td>(4, 4)</td></tr>
<tr><td>Minaccia (V^{TTU})</td><td>(1, 0)</td><td>(1, 0)</td><td>(1, 0)</td><td>(1, 0)</td><td>(4, 4)</td></tr>
</table>

Capitolo 14

I Giochi in Forma Strategica a Somma Variabile

A cura di Gianfranco Gambarelli

14.1 I Giochi a somma variabile

Gioco 1

Due terroristi sono chiusi in celle separate, senza la possibilità di comunicare fra loro. Insieme hanno commesso un reato; ora devono decidere se confessarlo o meno. Per via della collaborazione con la giustizia la confessione di ognuno diminuirebbe (da 10 a 5) il numero di anni di prigione; tale diminuzione sarebbe ancora maggiore (da 10 a 1) se fosse un solo giocatore a confessare. Se nessuno dei due confessa, l'attribuzione del reato non è dimostrabile ed entrambi vengono subito liberati.

Rappresentiamo il gioco nella tab. 14.1, precisando che in letteratura è noto un gioco, detto "Dilemma del prigioniero", simile a questo, ma diverso. Il dilemma del terrorista è anche noto come gioco della "caccia al cervo".

$I \backslash II$	confessa	non confessa
confessa	-5, -5	-1, -10
non confessa	-10, -1	0, 0

Tabella 14.1: Il dilemma del terrorista nel Gioco 1.

Notiamo che nei giochi a somma variabile la matrice dei pagamenti deve riportare le vincite di ogni giocatore per cui viene usualmente indicata come *bi-matrice dei pagamenti*.

Come si vede, si tratta di un gioco a somma variabile, in quanto, ad esempio, la coppia di mosse "confessa, confessa" porta a un totale di (-10), mentre "non confessa, non confessa" porta a un totale di 0.

Per risolverlo, iniziamo a considerare il punto di vista del primo giocatore. Se ci concentriamo solo sulle sue vincite (cioè sui numeri di sinistra) vediamo che la confessione gli porta un minimo di -5, la non confessione un minimo di -10. La sua mossa di sicurezza è quindi "confessa". Consideriamo ora il secondo giocatore (numeri di destra, mosse in verticale). Anche in questo caso la mossa di sicurezza è "confessa". Questo gioco ha un'ovvia soluzione cooperativa: la "non confessa, non confessa". Si tratta della "soluzione cooperativa di Nash". La sua attuabilità sta nelle condizioni del gioco: se i giocatori possono fidarsi uno dell'altro, o comunque controbilanciare comportamenti scorretti, può essere adottata; altrimenti la competitiva è più sicura.

V'è poi un problema che in questo esempio non viene messo in luce: la distribuzione della vincita fra i due giocatori. Qui, infatti, entrambi ottengono 0 anni ed escono liberi, ma in generale la ripartizione del guadagno da cooperazione non è così semplice.

Consideriamo ad esempio un gioco fra A e B ove, nella soluzione competitiva, A vince 6 e B vince 3. Se, cooperando, essi vincono un totale di 10, quanto andrà a ciascuno? Il signor B può proporre la ripartizione paritetica (5, 5), ma il signor A ribatte che, giocando in modo competitivo, riuscirebbe ad avere 6 da solo. Poiché anche B, per lo stesso motivo, non può ricevere meno di 3, si tratta di ripartire l'unità che resta. A questo punto parrebbe ovvio e giusto dividerla a metà fra i due, ma possono esserci altre considerazioni.

Nash risolse il problema nei Giochi a due persone in (1950a)... ma andiamo con ordine.

Anticipiamo nella tab. 14.2 una simbologia relativa a vari concetti di soluzione che presenteremo in seguito.

$v^M = (v_1^M, v_2^M)$	Competitiva di maxmin nelle strategie pure (anche non di sella)
$v^C = (v_1^C, v_2^C)$	Competitiva classica
$v^T = (v_1^T, v_2^T)$	Competitiva con minaccia
$v^{CTU} = (v_1^{CTU}, v_2^{CTU})$	Cooperativa classica TU (Utilità Trasferibile)
$v^{CNTU} = (v_1^{CNTU}, v_2^{CNTU})$	Cooperativa classica NTU (Utilità Non Trasferibile)
$v^{TTU} = (v_1^{TTU}, v_2^{TTU})$	Cooperativa con minaccia TU
$v^{TNTU} = (v_1^{TNTU}, v_2^{TNTU})$	Cooperativa con minaccia NTU
$v^E = (v_1^E, v_2^E, \dots, v_n^E)$	Una delle soluzioni corrispondenti a un Nash equilibrio in strategie pure

Tabella 14.2: Simbologia delle soluzioni di Nash.

14.2 La soluzione competitiva classica di Nash per Giochi a somma variabile

Iniziamo presentando due esempi che ci serviranno da guida nelle prossime pagine.

Gioco 2

I giocatori A e B devono scegliere se intervenire o no in una certa situazione. Le utilità corrispondenti sono:

- se un giocatore interviene e l'altro no, il primo vince 1 e l'altro 0;
- se entrambi intervengono, A vince 1/3 e B 1/6;
- se nessuno interviene, la vincita è nulla per entrambi.

Questo esempio è descritto in tab. 14.3, dove le possibili mosse di A sono in orizzontale ($NI=$ non intervento e $I=$ intervento), mentre quelle di B sono in verticale.

A \ B		Mosse di B	
		NI	I
mosse di A	NI	0, 0	0, 1
	I	1, 0	1/3, 1/6

Tabella 14.3: La bi-matrice del gioco 2.

Gioco 3

I giocatori A e B sono coinvolti in un'operazione economica, i cui risultati dipendono dalle loro azioni come descritto nella tab. 14.4.

A \ B		Mosse di B	
		B_1	B_2
mosse di A	A_1	0, 2	5, 0
	A_2	2, 0	1, 2

Tabella 14.4: La bi-matrice del gioco 3.

$A \backslash B$		Mosse di B		min	maxmin
		NI	I		
mosse di A	NI	0, 0	0, 1	0	
	I	1, 0	1/3, 1/6	1/3	←
min		0	1/6		
maxmin			↑		

Tabella 14.5: Le mosse di maxmin del gioco 2.

$A \backslash B$		Mosse di B		min	maxmin
		B_1	B_2		
mosse di A	A_1	0, 2	5, 0	0	
	A_2	2, 0	1, 2	1	←
min		0	0		
maxmin		↑	↑		

Tabella 14.6: Le mosse di maxmin del gioco 3.

Riportiamo nelle tab. 14.5 e 14.6 le tab. 14.3 e 14.4 opportunamente ampliate per la ricerca delle strategie pure di maxmin.

Per quanto riguarda il gioco 2 la coppia di frecce indica che la soluzione è I per il primo giocatore e I per il secondo. I corrispondenti pagamenti sono 1/3 e 1/6.

Per quanto riguarda il gioco 3 le frecce indicano che la soluzione implica A_2 per il primo giocatore e indifferenza tra B_1 e B_2 per il secondo. Tenuto conto della razionalità del primo e quindi della sua scelta prudenziale, è preferibile per il secondo giocatore la scelta B_2. I corrispondenti pagamenti sono 1 e 2, che non è soluzione di maxmin nelle strategie pure.

Nei Giochi a somma variabile, anche se vi è una soluzione di maxmin nelle strategie pure, le strategie miste possono migliorarlo per entrambi i giocatori.

Nota. V'è un altro concetto di soluzione competitiva, basato sull'eliminazione progressiva di strategie dominate, che qui non presenteremo.

Per tornare al caso generale, una volta eliminate le mosse dominate, se non risulta una soluzione immediata, si procede con la Programmazione Lineare per la ricerca delle strategie competitive miste.

Rappresentiamo il gioco in generale con la bi-matrice relativa a più di due mosse a testa:

<table>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="4">Mosse di
B</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>B_1</td><td>B_2</td><td>$\dots$</td><td>B_m</td></tr>
<tr><td rowspan="4">mosse di
A</td><td>A_1</td><td>a_{11}, b_{11}</td><td>a_{12}, b_{12}</td><td>$\dots$</td><td>a_{1m}, b_{1m}</td></tr>
<tr><td>A_2</td><td>a_{21}, b_{21}</td><td>a_{22}, b_{22}</td><td>$\dots$</td><td>a_{2m}, b_{2m}</td></tr>
<tr><td>$\dots$</td><td>$\dots$</td><td>$\dots$</td><td>$\dots$</td><td>$\dots$</td></tr>
<tr><td>A_n</td><td>a_{n1}, b_{n1}</td><td>a_{n2}, b_{n2}</td><td>$\dots$</td><td>a_{nm}, b_{nm}</td></tr>
</table>

Tabella 14.7: Bi-matrice con più mosse a testa.

Come si è detto, una strategia mista per un giocatore è una distribuzione di probabilità sulle sue strategie pure, cioè per il giocatore A un n-vettore $x = (x_1, \dots, x_n)$ (ove n è il numero di strategie pure a disposizione del giocatore), tale che $x_i \geq 0$ per tutti gli i da 1 a n e

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1,$$

e per il giocatore B un m-vettore $y = (y_1, \dots, y_m)$ (ove m è il numero di strategie pure a disposizione del giocatore), tale che

$y_j \geq 0$ per tutti i j da 1 a m e

$$\sum_{j=1}^{m} y_i = 1.$$

Se il primo sceglie la strategia mista x e il secondo la strategia mista y, allora il pagamento atteso per A è:

$$v(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i a_{ij} y_j,$$

e il pagamento atteso per B è:

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i b_{ij} y_j.$$

Ovviamente, le strategie miste vanno usate solo nei Giochi ove ha senso considerare distribuzioni di probabilità sulle strategie pure stesse, ad esempio, in Giochi ripetuti.

La soluzione per il primo giocatore è ottenuta risolvendo il seguente problema di Programmazione Lineare:

$$\max_{x_1, x_2, \ldots, x_n, v} v$$

nei vincoli:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij} \geq v \quad (j = 1, \ldots, m) \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\ x_i \geq 0 \quad (i = 1, \ldots, n) \end{cases}$$

Si tratta di un problema di Programmazione Lineare, che può essere risolto con i metodi citati nel relativo capitolo.

La soluzione per il secondo giocatore si ottiene:

$$\max_{y_1, y_2, \ldots, y_m, w} w$$

nei vincoli:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{m} y_j b_{ij} \geq w \quad (i = 1, \ldots, n) \\ \sum\limits_{j=1}^{m} y_j = 1 \\ y_j \geq 0 \quad (j = 1, \ldots, m) \end{cases}$$

Segnaliamo che la soluzione di minimax di ogni gioco rimane invariata nel gioco ridotto ottenuto eliminando le mosse dominate.

Osserviamo che nei Giochi a somma variabile non vale in generale il teorema del minimax di von Neumann.

In particolare, se il gioco si riduce a due mosse per giocatore, il lavoro si semplifica come segue.

Rappresentiamo il gioco in generale con la bi-matrice della tab. 14.8.

		Mosse di B	
		B_1	B_2
mosse di A	A_1	a_{11}, b_{11}	a_{12}, b_{12}
	A_2	a_{21}, b_{21}	a_{22}, b_{22}

Tabella 14.8: La bi-matrice dei Giochi a due persone con due mosse a testa.

Indichiamo con $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ i vettori delle strategie dei due giocatori, con i vincoli:

$$\begin{aligned} x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_1 + x_2 = 1 \\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_1 + y_2 = 1 \end{aligned} \tag{14.1}$$

Le strategie del primo giocatore sono analoghe a quelle del precedente capitolo per i Giochi a somma zero. Occorre peraltro tener conto che l'eliminazione delle mosse dominate non garantisce che sia $D_A \neq 0$ e $0 \leq x_1 \leq 1$. Occorre quindi procedere come segue.

Indichiamo $D_A = a_{12} + a_{21} - (a_{11} + a_{22})$. Se $D_A = 0$, allora la soluzione per il primo giocatore è la sua mossa di maxmin nelle strategie pure.

Altrimenti, posto $x' = (a_{21} - a_{22})/D_A$, si ha:

$$x = (x_1, x_2) = \begin{cases} (x', 1 - x') & \textit{se } 0 \leq x' \leq 1 \\ \text{la mossa di maxmin di A} & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

Si procede analogamente per ottenere le strategie del secondo giocatore: indicato $D_B = b_{12} + b_{21} - (b_{11} + b_{22})$, se $D_B = 0$, allora la soluzione per il secondo giocatore è la sua mossa di maxmin nelle strategie pure.

Altrimenti, posto $y' = (b_{12} - b_{22})/D_B$, si ha:

$$y = (y_1, y_2) = \begin{cases} (y', 1 - y') & \textit{se } 0 \leq y' \leq 1 \\ \text{la mossa di maxmin di B} & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

Le vincite corrispondenti sono date dalle formule:

$$\begin{aligned} v^{C_1} &= x_1 y_1 a_{11} + x_1 y_2 a_{12} + x_2 y_1 a_{21} + x_2 y_2 a_{22} \\ v^{C_2} &= x_1 y_1 b_{11} + x_1 y_2 b_{12} + x_2 y_1 b_{21} + x_2 y_2 b_{22} \end{aligned} \tag{14.2}$$

Applichiamo quanto sopra ai nostri esempi.

Gioco 2

L'eliminazione delle strategie dominate porta immediatamente alla soluzione $x = y = (0, 1)$, da cui $v^C = (1/3, 1/6)$. Osserviamo che in questo caso la soluzione con strategie miste coincide con quella di maxmin nelle strategie pure: $v^C = v^M$.

Gioco 3

$D_A = 6 \to x' = 1/6 \to x = (1/6, 5/6)$,

$D_B = -4 \to y' = 1/2 \to y = (1/2, 1/2)$,

$v_1^C = 5/3$, $v_2^C = 1$ cioè $v^C = (5/3, 1)$.

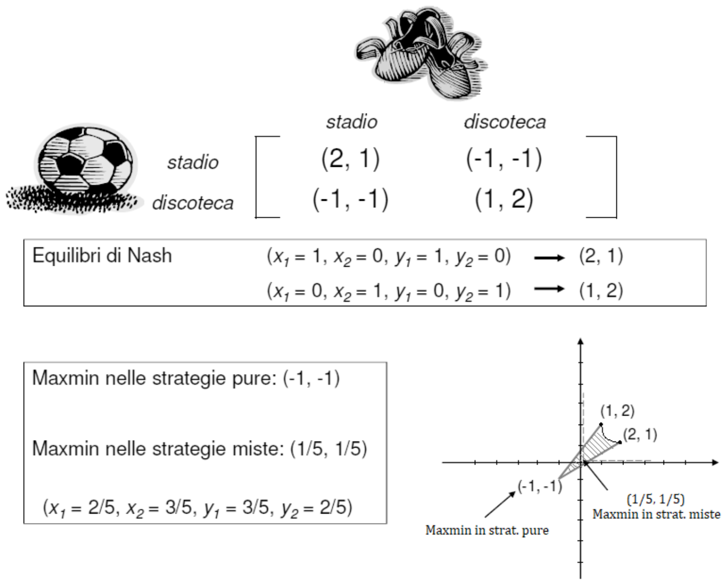


Figura 14.1: Soluzione della guerra dei sessi.

Esempio di soluzione competitiva di un gioco: la guerra dei sessi

Lei e lui vivono in posti diversi e sono impossibilitati a comunicare tra loro. Per la domenica sera, lui preferisce lo stadio, lei la discoteca; se entrambi scelgono lo stadio lui guadagna il massimo e lei guadagna la presenza di lui, analogamente a parti invertite se entrambi scelgono la discoteca. Se scelgono uno lo stadio e l'altro la discoteca non si incontrano e perdono entrambi la compagnia dell'altro.

Nella fig. 14.1 sono mostrate la matrice dei pagamenti, i due equilibri di Nash (che definiremo in seguito), indifferenza del maxmin nelle strategie pure, la soluzione maxmin nelle strategie miste.

14.3 La soluzione cooperativa classica di Nash a utilità non trasferibile (NTU) per Giochi a somma variabile

Forniamo ora un metodo per disegnare l'insieme dei pagamenti nelle strategie miste. Iniziamo da quelle non correlate, cioè non concordate fra i due giocatori: x_1, x_2, y_1, y_2 non negative e tali che $x_1 + x_2 = 1$ e $y_1 + y_2 = 1$.

Con riferimento al dilemma del terrorista (gioco 1) si riportano sugli assi cartesiani (vedi fig. 14.2) i punti corrispondenti alle coppie di numeri rappresentati nella bi-matrice (tab. 14.1). Si congiungono con segmenti le coppie di punti (intesi come coordinate cartesiane) che corrispondono a righe della bimatrice ((-5,-5) con (-1,-10) e (-10,-1) con (0,0)).

Si congiungono poi fra loro nel grafico i punti che, nella bimatrice, sono sulla stessa colonna ((-5,-5) con (-10,-1) e (-1,-10) con (0,0)).

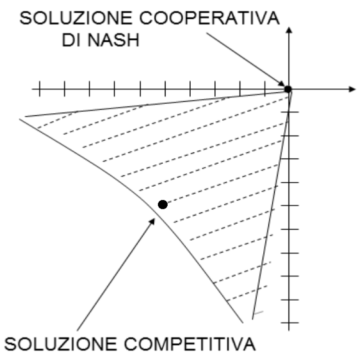


Figura 14.2: Rappresentazione cartesiana del dilemma del terrorista.

Occorre poi arrotondare i segmenti che delimitano le zone concave della figura. Il grafico risultante da tale metodo è poco preciso, ma sufficiente a indicare la soluzione (per l'equazione esatta (Carfì & Gambarelli, 2015)). La zona così delimitata (tratteggiata in figura) corrisponde a tutti i possibili pagamenti raggiungibili dai giocatori per mezzo di strategie miste non concordate.

Nella figura sono in particolare evidenziati i pagamenti relativi alla soluzione pura competitiva $(-5, -5)$ e cooperativa $(0, 0)$. In questo caso è ovvio che non vi sono problemi nel considerare soluzione cooperativa a tutti gli effetti quest'ultimo punto.

L'insieme dei pagamenti delle strategie miste correlate, cioè concordabili fra i due giocatori, si ottiene invece, congiungendo fra loro tutti i punti corrispondenti agli elementi della bimatrice e considerando il poligono più grande così delimitato.

In questa sede ci limiteremo alla ricerca delle soluzioni relative a strategie miste non correlate.

Consideriamo un gioco i cui pagamenti sono rappresentati in fig. 14.3.

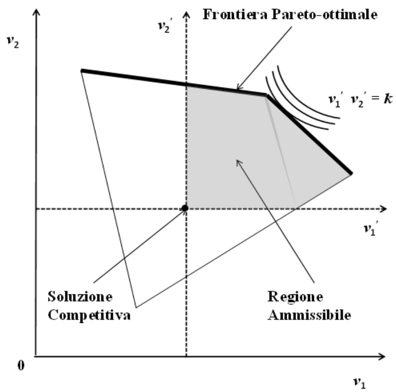


Figura 14.3: Rappresentazione cartesiana della soluzione cooperativa classica di Nash per Giochi a due persone.

I vertici del poligono corrispondono ai pagamenti raggiungibili con le strategie pure. In questo caso è tratteggiata la sola regione in cui è rispettata la *razionalità individuale*, cioè ove i pagamenti non sono inferiori a quelli che ciascuno otterrebbe con la soluzione competitiva mista.

L'insieme di tali punti si chiama *regione ammissibile*.

Osserviamo che, agli effetti di una soluzione cooperativa del gioco, qualsiasi punto interno alla regione ammissibile è da scartare, perché ne esiste certamente un altro più in alto a destra che è migliore per entrambi i giocatori. Per rendere visiva questa situazione, basta posizionare il palmo della mano sinistra con il pollice parallelo al primo asse, l'indice parallelo al secondo e l'origine di questi "assi manuali" sul punto. La zona del poligono che rimane scoperta è congiuntamente migliorabile per entrambi i giocatori.

Notiamo che anche la parte di frontiera non ingrossata, in basso a destra della regione ammissibile, è congiuntamente migliorabile: sovrapponendo la mano possiamo infatti vedere che restano punti scoperti. Gli unici punti della frontiera del poligono che sopravvivono a questa selezione sono quelli ingrossati. Essi costituiscono la cosiddetta *frontiera Pareto-ottimale*, tale che, in ciascuno dei suoi punti, un miglioramento del pagamento per un giocatore implica necessariamente un peggioramento per l'altro. In particolare, la parte di frontiera Pareto-ottimale appartenente al quadrante della razionalità individuale si chiama insieme di negoziazione. Ricordiamo due definizioni di base: un insieme si dice compatto se è chiuso e limitato; convesso se il segmento congiungente due qualsiasi punti dell'insieme, appartiene all'insieme stesso. Osserviamo che l'insieme dei pagamenti è compatto e convesso se proviene da strategie correlate; può non essere convesso, altrimenti.

Nash in (Nash, 1950a) dimostrò che, se l'insieme dei pagamenti è compatto e convesso, esiste un unico punto di arrivo della contrattazione, in grado di rispettare un ragionevole sistema di assiomi:

1. razionalità individuale;

2. appartenenza alla regione ammissibile;

3. Pareto-ottimalità;

4. simmetria (se la regione dei possibili pagamenti è simmetrica rispetto ad una retta parallela alla bisettrice degli assi del primo quadrante e la soluzione competitiva classica appartiene a tale retta, allora la soluzione cooperativa deve stare su tale retta).

Vi sono inoltre due assiomi tecnici di indipendenza (da alternative irrilevanti e da trasformazioni lineari).

Geometricamente (v. fig. 14.3) tale soluzione corrisponde ai punti di tangenza fra la frontiera Pareto-ottimale e le iperboli equilatere riferite agli assi con origine nella soluzione competitiva in strategie miste (v_1^C, v_2^C).

In formule, detta S, la regione ammissibile, la soluzione corrisponde a:

$$\max_{v_1, v_2 \in S} \left(v_1 - v_1^C\right)\left(v_2 - v_2^C\right).$$

Un metodo costruttivo per raggiungere la soluzione è descritto in fig. 14.4.

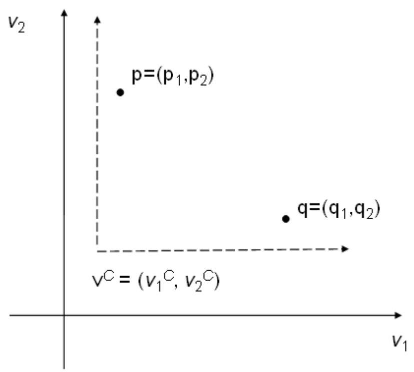


Figura 14.4: Teorema di Nash per la soluzione cooperativa NTU per Giochi a due persone.

Inizialmente occorre verificare che la frontiera Pareto-ottimale delimiti una regione convessa in alto a destra; in caso negativo, si conclude che la soluzione cooperativa di Nash NTU non esiste. Altrimenti, si individua il lato della frontiera Pareto-ottimale di vertici $p = (p_1, p_2)$ e $q = (q_1, q_2)$ affacciato sul fascio di iperboli equilatere:

$$\frac{(v_2 - p_2)}{(q_2 - p_2)} = \frac{(v_1 - p_1)}{(q_1 - p_1)}.$$

Si risolve il sistema fra l'equazione della retta passante per p e q e quella del fascio di iperboli equilatere. Da tale sistema uscirà un'equazione di secondo grado in v_1 o in v_2. Per la condizione di tangenza occorrerà imporre che le due soluzioni di tale equazione siano coincidenti. Se cioè l'equazione è del tipo:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

le cui soluzioni sono date da:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

la soluzione dovrà essere semplicemente $x = -\frac{b}{2a}$, in quanto la parte sotto radice va annullata.

Avvertenza: può capitare che il punto di tangenza tra l'iperbole e la retta cui appartiene la frontiera Pareto-ottimale sia esterno al segmento (p, q). In tal caso quel punto va scartato e sostituito con il vertice più vicino (v. fig. 14.5).

Applichiamo i concetti visti finora, agli esempi di questo capitolo e calcoliamo in tutti questi esempi la soluzione cooperativa classica NTU, che indicheremo come $v^{CNTU} = (v_1^{CNTU}, v_2^{CNTU})$. Domandiamoci ora se la soluzione $v^{CNTU} = (v_1^{CNTU}, v_2^{CNTU})$ così ottenuta è raggiungibile con strategie non correlate, cioè variabili non negative x_1, x_2, y_1, y_2 tali che $x_1 + x_2 = 1$ e $y_1 + y_2 = 1$. La risposta è sì, se e solo se:

- la soluzione è su un vertice del poligono dei pagamenti,

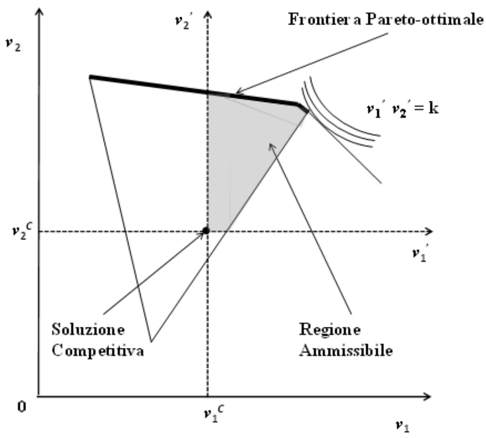


Figura 14.5: Tangenza esterna.

ovvero

- i pagamenti corrispondenti ai due vertici del lato su cui sta la soluzione, sono sulla stessa riga o sulla stessa colonna della bimatrice.

Facendo riferimento al gioco generico della fig. 14.3, tali strategie si ottengono, con un po' di pazienza, come segue. Posti per semplicità $x = x_1$ e $y = y_1$ occorre risolvere in x e y le due equazioni:

$$v_1^{CNTU} = xya_{11} + x(1-y)a_{12} + (1-x)ya_{21} + (1-x)(1-y)a_{22}$$
$$v_2^{CNTU} = xyb_{11} + x(1-y)b_{12} + (1-x)yb_{21} + (1-x)(1-y)b_{22}.$$

Gioco 1

Nel caso del dilemma del terrorista la perfetta simmetria della regione dei pagamenti rispetto alla bisettrice degli assi principali implica che la soluzione è sulla bisettrice stessa

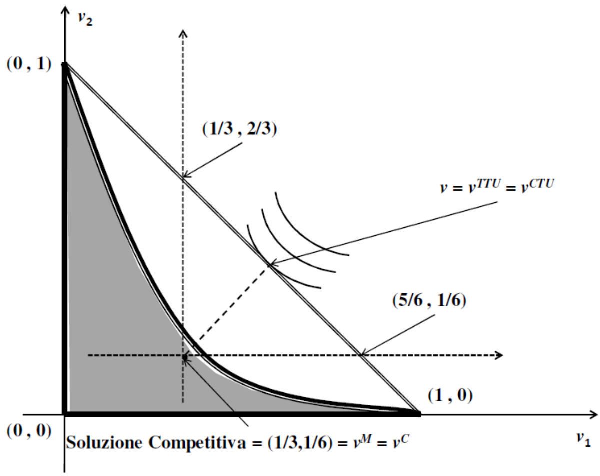


Figura 14.6: Rappresentazione del gioco 2.

(ricordiamo l'assioma 4 di Nash). Essendo la frontiera Pareto-ottimale composta di un unico punto (l'origine degli assi), tale punto costituisce la soluzione $v^{CNTU} = (0,0)$.

Gioco 2

Consideriamo ora il Gioco 2 rappresentato in fig. 14.6.

Dal grafico si deduce facilmente che la soluzione in strategie correlate sarebbe il punto medio del segmento congiungente $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ e $\left(\frac{5}{6},\frac{1}{6}\right)$, cioè $\left(\frac{7}{12},\frac{5}{12}\right)$. Peraltro tale soluzione non è raggiungibile con strategie non correlate, perchè la regione ammissibile è concava in alto e destra, per cui non v'è soluzione cooperativa NTU. Nella figura è anche riportata la soluzione TU, che vedremo in seguito.

Gioco 3

Consideriamo il gioco 3.

L'insieme dei pagamenti è il quadrangoloide in fig. 14.7, avente per vertici i punti $(2,0)$, $(5,0)$, $(1,2)$, $(0,2)$.

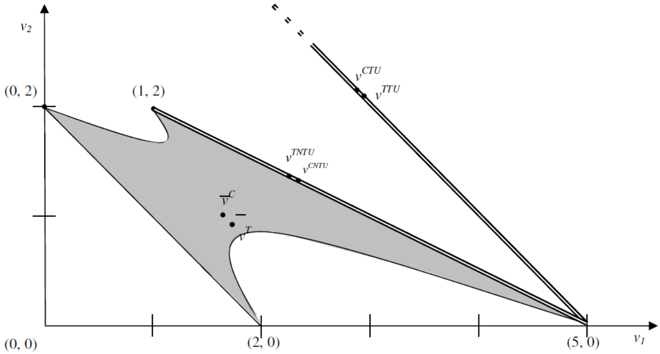


Figura 14.7: Rappresentazione del gioco 3.

La frontiera Pareto-ottimale è costituita dal segmento congiungente i punti $(q_1, q_2) = (5, 0)$ e $(p_1, p_2) = (1, 2)$. L'equazione dei suoi punti (p, q) è data dalla formula:

$$\frac{(v_2 - 2)}{(0 - 2)} = \frac{(v_1 - 1)}{(5 - 1)}.$$

Nella figura sono indicate anche le soluzioni v^{CTU}, v^{TTU}, v^{TNTU} che verranno calcolate in seguito.

Nel nostro caso l'equazione vale $v_2 = (5 - v_1)/2$.

L'equazione del fascio di iperboli equilatere riferite alla soluzione competitiva classica $(v_1^C, v_2^C) = (5/3, 1)$ è:

$$\left(v_1 - v_1^C\right)\left(v_2 - v_2^C\right) = k$$

al variare del parametro reale k.

Il punto di tangenza fra tale fascio e la frontiera Pareto-ottimale si ottiene cercando le due soluzioni coincidenti dell'equazione di secondo grado ottenuta dalle due equazioni di cui sopra:

$$3v_2^2 - 8v_2 + 5 + \frac{3k}{2} = 0.$$

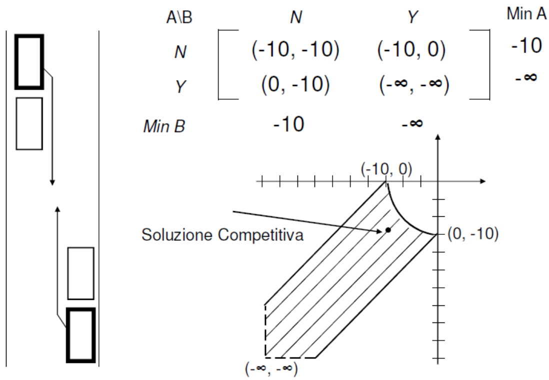


Figura 14.8: Il problema del sorpasso nel gioco 4.

La condizione di tangenza (radice quadrata nulla porta a $v_1 = 7/3$ e $v_2 = 4/3$.

Poiché $1 \leq v_1 \leq 5$, tale punto appartiene al segmento (p, q). Pertanto la soluzione cooperativa classica NTU è $v^{CNTU} = (7/3, 4/3)$.

14.4 Soluzione cooperativa classica TU

Gioco 4

Consideriamo il "gioco del sorpasso" illustrato in fig. 14.8: due automobilisti viaggiano in direzioni opposte su una strada a tre corsie. Ognuno ha dinnanzi a sé un'auto da superare. Se nessuno sorpassa, ciascuno perde 10 secondi di tempo. Se uno sorpassa e l'altro no, chi sorpassa non perde tempo, mentre l'altro resta a -10. Se infine entrambi sorpassano, guadagnano... l'eternità. Per applicare le formule del paragrafo 14.2 per i Giochi a due giocatori e due mosse sostituiamo a $-\infty$ per semplicità un numero negativo z:

$$D_A = -z \rightarrow x' = -z/(-z) = 1 \rightarrow x = (1,0),$$
$$D_B = -z \rightarrow y' = -z/(-z) = 1 \rightarrow y = (1,0),$$

da cui si trova la soluzione competitiva classica di Nash in strategie miste:

$$v_A^C = -10,$$
$$v_B^C = -10.$$

Osserviamo che anche in questo caso la soluzione con strategie miste coincide con quella di maxmin nelle strategie pure: $v^C = v^M$.

Come si vede dal grafico, la soluzione a strategie correlate è $(-5,-5)$, ma in quel caso la correlazione fra le strategie dei due giocatori è inverosimile; d'altra parte, tale soluzione non è raggiungibile con strategie non correlate.

La soluzione competitiva prudenziale di maxmin delle strategie miste $(-10,-10)$, che corrisponde alla scelta di non sorpassare per entrambi, non può però essere migliorata per entrambi i giocatori, in quanto l'utilità non è trasferibile. In effetti, non è verosimile che, seguendo il principio "il tempo è denaro", uno dei due sorpassi e l'altro no, ma il primo passi al volo una somma di denaro al secondo.

Gioco 4 (soluzione cooperativa classica TU)

Se si cambiano le regole del gioco (come illustrato nella fig. 14.9) introducendo corsie di sorpasso alternate nei due sensi di marcia, il gioco diviene a utilità trasferibile (TU). Con questa operazione è possibile raggiungere la soluzione cooperativa $(-5,-5)$.

In generale, le soluzioni cooperative a utilità trasferibile si ottengono individuando la retta a -45 gradi rispetto all'asse delle ascisse, passante per il punto dell'insieme dei pagamenti avente massima la somma s delle coordinate (v. fig. 14.10).

Operativamente, i due giocatori si accordano di utilizzare le strategie che massimizzano la somma totale dei pagamenti. Nel caso in cui tale somma può derivare da diverse strategie

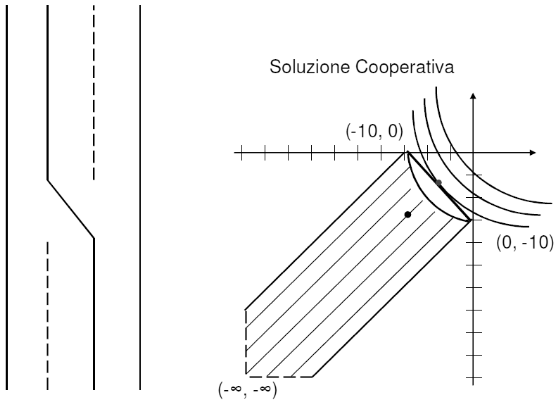


Figura 14.9: Gioco del sorpasso TU.

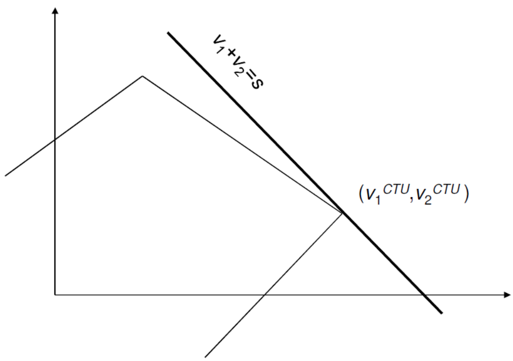


Figura 14.10: La soluzione cooperativa classica TU.

si accordano per raggiungerne una qualsiasi. In seguito il giocatore che viene avvantaggiato da quelle strategie compensa l'altro trasferendogli parte dell'utilità, fino a raggiungere la soluzione cooperativa TU.

Tale soluzione corrisponde al punto di tangenza del fascio di iperboli riferite ai nuovi assi, con la retta a −45 gradi di cui sopra. L'equazione di tale soluzione $v^{CTU} = (v_1^{CTU}, v_2^{CTU})$, illustrata in fig. 14.11, è la seguente:

$$v_1^{CTU} = (s + v_1^C - v_2^C)/2,$$
$$v_2^{CTU} = (s - v_1^C + v_2^C)/2.$$

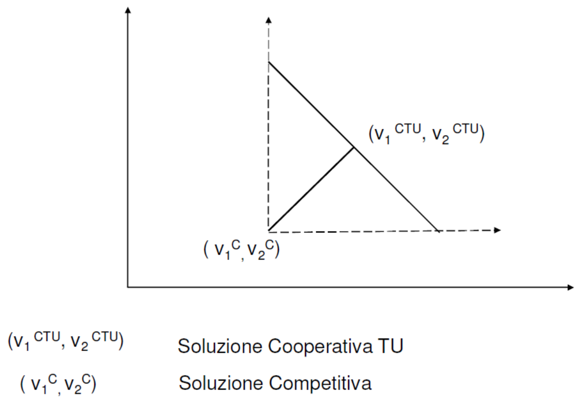


Figura 14.11: Soluzione cooperativa classica TU.

Per il gioco del sorpasso l'applicazione della formula fornisce appunto $v^{CTU} = (-5, -5)$, cioè entrambi i giocatori riducono il ritardo a 5 secondi.

Osserviamo che la soluzione TU esiste in tutti i casi anche per insiemi non convessi dovuti a strategie non correlate.

Troviamo ora le soluzioni cooperative classiche TU dei precedenti esempi.

Gioco 1

Nel dilemma del terrorista il punto $(0, 0)$ è quello per cui la somma dei pagamenti è massima. Per motivi di simmetria, il punto di soluzione TU sulla retta a -45 gradi passante per $(0, 0)$ è ancora l'origine. Pertanto la soluzione TU coincide con la NTU.

Gioco 2

La massima somma dei pagamenti vale 1 (ottenibile se un giocatore interviene e l'altro no). Pertanto le soluzioni per la cooperativa TU sono:

$v_1^C = 1/3$, $v_2^C = 1/6$, da cui $v^{CTU} = (7/12, 5/12)$.

Gioco 3

La massima somma dei pagamenti vale 5. Pertanto le soluzioni per la cooperativa TU sono $v^{CTU} = (17/6, 13/6)$.

14.5 Le soluzioni di Nash con minaccia

Nash pubblicò inoltre nel 1953 una seconda soluzione cooperativa per Giochi a due persone, detta *con minaccia*, che corrisponde alla ricerca di una cooperazione forzata. Si basa sul fatto che ogni giocatore ha interesse che si arrivi a una soluzione cooperativa. L'impostazione conseguente è che ogni giocatore minaccia che, se l'altro non collaborerà, lui non userà la sua strategia prudenziale di maxmin, ma cercherà di danneggiare l'altro, nel senso di ottimizzare la differenza fra la sua vincita e quella dell'altro giocatore. In concreto, si costruisce la seguente matrice dei pagamenti. Le vincite del primo giocatore sono le differenze, nel gioco originario, fra le vincite del primo e quelle del secondo; le vincite del secondo giocatore sono le differenze, nel gioco originario, fra le vincite del secondo e quelle del primo. Evidentemente si tratta di un gioco a somma zero, rappresentato nella tab. 14.9 (pag. 316) a partire dal gioco a due giocatori con più strategie a testa della tab. 14.7.

		Mosse di B			
		y_1	y_2	$\dots$	y_m
mosse di A	x_1	$a_{11}-b_{11}, b_{11}-a_{11}$	$a_{12}-b_{12}, b_{12}-a_{12}$	$\dots$	$a_{1m}-b_{1m}, b_{1m}-a_{1m}$
	x_2	$a_{21}-b_{21}, b_{21}-a_{21}$	$a_{22}-b_{22}, b_{22}-a_{22}$	$\dots$	$a_{2m}-b_{2m}, b_{2m}-a_{2m}$
	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
	x_n	$a_{n1}-b_{n1}, b_{n1}-a_{n1}$	$a_{n2}-b_{n2}, b_{n2}-a_{n2}$	$\dots$	$a_{nm}-b_{nm}, b_{nm}-a_{nm}$

Tabella 14.9: Il gioco differenza in generale.

Una volta costruita tale matrice, si calcolano le strategie miste di maxmin e si trasferiscono al gioco originario per calcolare i relativi pagamenti, che costituiscono la *soluzione competitiva con minaccia.* Tale soluzione viene poi applicata come base per i nuovi assi, nella ricerca delle soluzioni cooperative TU e NTU.

Applichiamo quanto ora introdotto ai quattro esempi di questo capitolo, riportando le matrici differenza riferite al primo giocatore.

Gioco 1

La matrice differenza è riportata nella tab. 14.10.

	confessa	non confessa
confessa	0	9
non confessa	-9	0

Tabella 14.10: La matrice differenza del gioco 1.

Con semplici considerazioni sulla dominanza, si deduce che le strategie competitive di maxmin minacciate dai due sono (Confessa, Confessa) che, applicate al gioco originario, portano alle stesse soluzioni classiche TU e NTU.

Gioco 2

La matrice differenza è riportata nella tab. 14.11.

	y_1	y_2
x_1	0	-1
x_2	1	1/6

Tabella 14.11: La matrice differenza del gioco 2.

Eliminando le mosse dominate si ottengono immediatamente le strategie di minaccia $x = y = (0, 1)$ che, adottate sulla matrice originaria della tab. 14.3, portano ai pagamenti:

$$v^T = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right).$$

Essendo tale punto lo stesso della soluzione competitiva classica, se ne deducono le stesse conseguenze per le soluzioni. Pertanto non v'è soluzione cooperativa con minaccia NTU, mentre la soluzione cooperativa con minaccia TU è $v^{TTU} = (7/12, 5/12)$.

Gioco 3

La matrice differenza è riportata nella tab. 14.12.

	y_1	y_2
x_1	-2	5
x_2	2	-1

Tabella 14.12: La matrice differenza del gioco 3.

Usando le formule di determinazione diretta della soluzione a strategie miste sulla matrice 14.12, si ottiene:

$$x = \left(\frac{3}{10}, \frac{7}{10}\right),\ y = \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right).$$

Tali strategie di minaccia, applicate alla matrice originaria, portano ai pagamenti

$$v_1^T = \frac{43}{25},\ v_2^T = \frac{23}{25}.$$

Cerchiamo la soluzione cooperativa NTU.

L'equazione del fascio di iperboli equilatere riferite a tale punto è:

$$\left(v_1 - \frac{43}{25}\right)\left(v_2 - \frac{23}{25}\right) = k.$$

L'equazione di secondo grado che produce le intersezioni fra tale fascio e la frontiera Pareto-ottimale è:

$$2v_2^2 - \left(\frac{128}{25}\right)v_2 + \text{costante} = 0.$$

La condizione di tangenza (radice quadrata nulla e quindi $v_2 = -b/2a$) porta a $v_1 = 61/25$ e $v_2 = 32/25$.

Poiché $1 \leq v_1 \leq 5$, tale punto appartiene al segmento di estremi p e q. Pertanto la soluzione cooperativa con minaccia NTU è $v^{TNTU} = (61/25, 32/25)$.

Le corrispondenti strategie possono essere ottenute ribaltando le formule del paragrafo 14.2, cioè:

$x_1 + x_2 = 1$, con la condizione $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$,
$y_1 + y_2 = 1$, con la condizione $y_1 \geq 0$, $y_2 \geq 0$,
$v_1^{TNTU} = x_1y_1a_{11} + x_1y_2a_{12} + x_2y_1a_{21} + x_2y_2a_{22}$,
$v_2^{TNTU} = x_1y_1b_{11} + x_1y_2b_{12} + x_2y_1b_{21} + x_2y_2b_{22}$,

che nel nostro caso diviene:

$x_1 + x_2 = 1$,
$y_1 + y_2 = 1$,
$61/25 = x_1y_1 0 + x_1y_2 5 + x_2y_1 2 + x_2y_2 1$,
$32/25 = x_1y_1 2 + x_1y_2 0 + x_2y_1 0 + x_2y_2 2$.

Si tratta di un sistema di quarto grado di quattro equazioni in quattro incognite che ammette in generale quattro soluzioni. Tale sistema ha una sola soluzione accettabile: $x_1 = 9/25$, $x_2 = 16/25$ e $y_1 = 0$, $y_2 = 1$.

La massima somma dei pagamenti vale 5. Pertanto le soluzioni per la cooperativa con minaccia TU sono:

$$v_1^T = \left(\frac{43}{25}\right), v_2^T = \left(\frac{23}{25}\right), \text{ quindi } v^{TTU} = \left(\frac{29}{10}, \frac{21}{10}\right).$$

Gioco 4

La matrice differenza è riportata nella tab. 14.13.

	non sorpasso	sorpasso
non sorpasso	0	-10
sorpasso	10	0

Tabella 14.13: La matrice differenza del gioco 4.

Per motivi di dominanza, entrambi optano per la minaccia di sorpasso ($x = y = (0, 1)$) che, applicate alla matrice originaria, portano ai pagamenti $(-\infty, -\infty)$.

14.6 Gli equilibri di Nash

Nel seguito utilizzeremo indifferentemente la dizione equilibri di Nash o Nash equilibri.

Il teorema del Minimax di von Neumann del 1928 vale solo per Giochi a somma costante fra due persone. Per Giochi a somma variabile e per Giochi con più di due giocatori è necessario attendere i risultati di Nash. Nei paragrafi precedenti abbiamo accennato a quelli relativi ai Giochi a due persone; ora ci occupiamo di Giochi a n persone, con $n \geq 2$. Per ambientarci, osserviamo la fig. 14.12 relativa a un gioco a tre persone. Se il primo giocatore usa la sua 5^a mossa, il secondo la sua 4^a e il terzo la sua 5^a, i pagamenti (riportati nel cubetto) sono 3, 12 e -9 rispettivamente. Immaginiamo che dentro ogni cubetto corrispondente a una terna di mosse siano scritti i tre pagamenti dei giocatori, in una sorta di dado di Rubik.

- Prima domanda: il gioco è a somma zero? Risposta: "NO", perché la somma dei pagamenti nel cubetto non è zero.
- Seconda domanda: è a somma costante? La risposta esatta è "BOH", perché non conosciamo le somme delle terne di tutti gli altri cubetti.

Come si diceva, per questo gioco non vale il teorema del minimax di von Neumann; i giocatori possono comunque adotta-

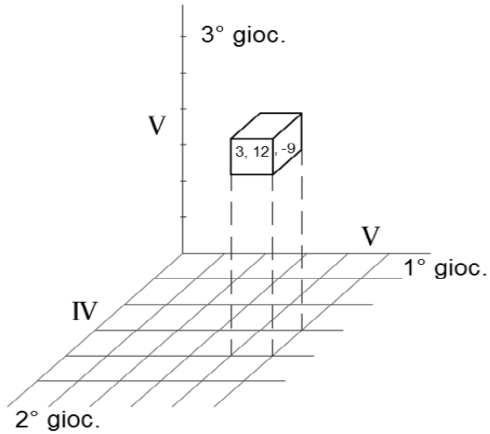


Figura 14.12: Un gioco a tre persone.

re mosse di maxmin nelle strategie pure, in modo da garantirsi di non perdere oltre un certo limite.

Un concetto importantissimo in questo contesto è l'equilibrio di Nash, introdotto in (1950b). Per illustrarlo, supponiamo che, nell'esempio della fig. 14.12, il primo giocatore, invece di usare la sua 5^a mossa, ne usi un'altra, ad esempio la sua 2^a, mentre gli altri due mantengono fisse le loro. Ipotizziamo che in tal caso il primo giocatore, invece di vincere 3, vinca 1 e che gli arrivi una diminuzione (o un'invarianza) per qualsiasi cambiamento di mossa, ferme restando le mosse degli altri due. Supponiamo ora che, fermo restando il primo giocatore sulla sua mossa iniziale, lo stesso effetto di calata (o invarianza) al cambio della scelta, accada anche al secondo e al terzo giocatore. In tal caso, la terna di strategie corrispondenti alle mosse (5^a, 4^a,5^a) è un *Nash equilibrio*, o *equilibrio di Nash*. In generale, un Nash equilibrio di un gioco a n persone è un vettore di n strategie tali che, se tutti i giocatori le adottano,

II \ I	m_1^{II}	m_2^{II}	m_3^{II}
m_1^I	1, 2	0, 0	0, 0
m_2^I	0, 0	0, 0	0, 0
m_3^I	0, 0	0, 0	0, 0
m_4^I	0, 0	0, 0	7, 1

Tabella 14.14: Nash equilibri.

nessuno è incentivato a cambiare la sua.

Consideriamo un esempio a due giocatori espresso nella tab. 14.14.

Si capisce chiaramente che la coppia di strategie pure corrispondenti a (m_1^I, m_1^{II}) è un Nash equilibrio in quanto se uno tiene fissa la sua strategia e l'altro cambia la propria, l'altro azzera il proprio pagamento. Un altro Nash equilibrio è, ad esempio, (m_4^I, m_3^{II}).

Se consideriamo infine le coppie di mosse (m_2^I, m_2^{II}) e (m_3^I, m_2^{II}), si tratta ancora di un Nash equilibrio in quanto la relativa formulazione prevede un minore o eguale e non uno strettamente minore.

Ad esempio, nel gioco della tab. 13.3 la coppia di strategie corrispondenti alle mosse (m_2^I, m_3^{II}) è un Nash equilibrio. Infatti se il primo giocatore mantiene fissa la sua mossa m_2^I, al secondo giocatore non conviene cambiare la sua mossa m_3^{II}. Viceversa se il secondo giocatore resta fisso sulla mossa m_3^{II}, al primo giocatore non conviene cambiare la sua.

In generale sono Nash equilibri tutti i punti di sella dei Giochi a due persone a somma costante.

Il Nash equilibrio è quindi una generalizzazione della soluzione di von Neumann.

Formalmente, una n-upla di strategie $s^* = (s_1^*, \dots, s_n^*)$ è detta *Nash equilibrio* se, per tutti gli i da 1 a n e per tutte le

(1, 2)	($\underline{15}$, $\underline{5}$)	($\underline{12}$, 4)
($\underline{10}$, $\underline{0}$)	(10, -2)	(10, -5)
(2, $\underline{5}$)	(5, 3)	(8, 3)

Tabella 14.15: Un gioco con due Nash equilibri.

strategie s_i dei giocatori si ha:

$$p_i(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*) \leq p_i(s_1^*, \ldots, s_n^*).$$

Notiamo che un Nash equilibrio può anche riguardare strategie miste.

Si può dimostrare l'esistenza di una n-upla di strategie (pure o miste) di Nash equilibri per ogni gioco finito di n-persone a informazione completa.

Una tecnica comoda per individuare Nash equilibri nelle strategie pure è la seguente: con riferimento alla tab. 14.15, sottolineiamo, nei numeri di sinistra della prima colonna, il massimo (o i massimi). Facciamo lo stesso con i numeri di sinistra della seconda colonna e così via fino all'ultima.

A questo punto procediamo sottolineando il massimo (o i massimi) dei numeri di destra della prima riga, continuando nello stesso modo con le altre righe.

Terminato questo lavoro si individuano le coppie di numeri che risultano entrambi sottolineati; tali coppie corrispondono a tutti, e soli, i Nash equilibri in strategie pure del gioco.

Osserviamo che il Nash equilibrio non è la coppia di pagamenti, ma la coppia di strategie che porta a tali pagamenti; nel caso della tab. 14.15 vi sono due Nash equilibri: uno è costituito dalle strategie pure corrispondenti alla prima mossa del primo giocatore e alla seconda mossa del secondo, con pagamenti $(15, 5)$; l'altro Nash equilibrio è costituito dalle strategie corrispondenti alla seconda mossa del primo giocatore e alla prima mossa del secondo, con pagamenti $(10, 0)$.

È facile verificare che il gioco nella tabella successiva 14.16 ha tre Nash equilibri nelle strategie pure.

(1, 2)	($\underline{5}$, $\underline{4}$)	(4, 3)
($\underline{5}$, $\underline{3}$)	(4, 1)	(3, 2)
(2, 3)	(3, 2)	($\underline{5}$, $\underline{4}$)

Tabella 14.16: Un gioco con tre Nash equilibri.

	C	NC
C	(-α, α-150)	(-150, $\underline{0}$)
NC	($\underline{0}$, -150)	($\underline{-100}$, $\underline{-100}$)

Tabella 14.17: Matrice dei pagamenti.

Esempio N. 5: Lotta all'inquinamento

Due Paesi confinanti sono soggetti a un forte inquinamento che comporta una spesa (ospedaliera etc.) di 100 unità, relativamente a un certo periodo corrispondente alla durata di vita di un depuratore. I paesi si pongono il problema di costruire un depuratore in comune che possa risolvere il problema nell'arco temporale suesposto. Si ipotizzi che il costo di tale apparecchiatura sia di 150 unità.

Costruiamo nella tab. 14.17 la bi-matrice dei pagamenti. In caso di non cooperazione da parte di entrambi (NC, NC), ciascun Paese ha un pagamento di -100 corrispondente alla spesa da inquinamento. Se il depuratore viene realizzato a spese di un solo Paese, quest'ultimo ha un pagamento di $(-150 - 0) = -150$, mentre l'altro ha un pagamento di 0 in quanto il suo costo da inquinamento si annulla. Se infine entrambi collaborano, i pagamenti corrispondono a $-\alpha$ per uno e $(\alpha - 150)$ per l'altro con $0 < \alpha < 150$.

È facile verificare che questo gioco ha un solo Nash equilibrio nelle strategie pure, consistente in (NC, NC), che porta ai pagamenti $(-100, -100)$.

Rappresentando il gioco nella fig. 14.13 osserviamo che, poiché il punto $(-\alpha, \alpha{-}150)$ si trova sul segmento congiungente

$(0, -150)$ e $(-150, 0)$, il grafico del gioco risulta simmetrico e il gioco presenta una soluzione cooperativa (sia classica che con minaccia) TU e NTU, con pagamenti $(-75, -75)$. Pertanto quest'ultima soluzione non corrisponde a un Nash equilibrio.

In effetti a ogni giocatore conviene non cooperare, ma lasciare che sia l'altro a realizzare l'opera.

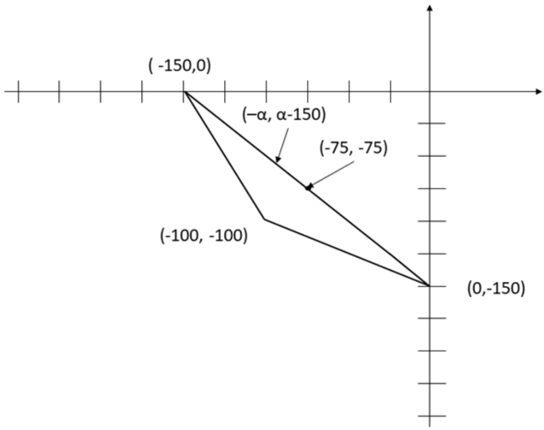


Figura 14.13: Rappresentazione grafica del gioco.

Usualmente situazioni di questo tipo vengono risolte in maniera dinamica in modo da raggiungere una soluzione cooperativa, secondo una procedura del tipo:

- i due Paesi iniziano a costruire insieme il basamento del depuratore sobbarcandosi le relative quote;

- una volta terminata questa fase i due Paesi costruiscono il supporto per ospitarlo e via via completano la costruzione del depuratore stesso, depositando di volta in volta in anticipo le somme relative alla fase interessata.

In tal modo a nessuno conviene sottrarsi unilateralmente all'impegno.

14.7 Un anticipo su “A Beautiful Mind”

Per alleggerire la trattazione, che nelle ultime pagine è stata un po’ dura da digerire, occupiamoci un momento del film “A Beautiful Mind”, di cui tratteremo maggiormente in Appendice. Qui ci limitiamo all’unico episodio in cui è illustrata una sorta di "soluzione di Nash", cioè "il caso della bionda".

Il giovane Nash si trova in un bar con tre amici. Entrano quattro ragazze: una bionda strepitosa e tre brunette meno appetibili.

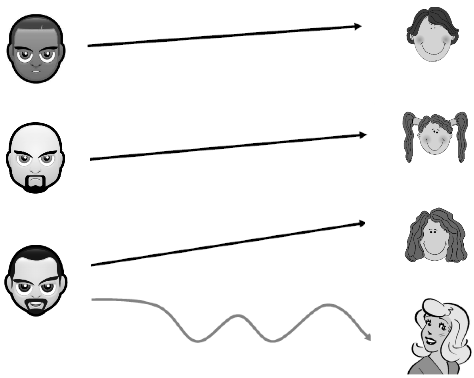


Figura 14.14: A beautiful mind.

Gli sguardi dei tre amici si concentrano ovviamente sull’obiettivo biondo, ma Nash (che sta uscendo) osserva: se tutti e tre vi buttate a caccia della migliore, le altre se ne vanno offese e voi restate a spennarvi a vicenda, finché anche la bionda se ne va. Soluzione: lasciate la bionda al suo destino, indirizzatevi ognuno su una mora e dovreste riuscire a realizzare qualcosa di buono.

A prescindere dal maschilismo dell’episodio (pure le fanciulle dovrebbero aver voce in capitolo) v’è qualcosa che non funziona.

Domandiamoci: quella proposta...

- ... è una soluzione cooperativa di Nash per Giochi a due persone? NO, perché i giocatori coinvolti sono tre.

- ... è una soluzione cooperativa con minaccia per Giochi a due persone? NO, perché i giocatori coinvolti sono tre.

- ... è un Nash equilibrio? Se due giovanotti si rivolgono a due brunette, al terzo conviene restare sull'ultima brunetta? NO, quindi non si tratta di un equilibrio di Nash.

Quindi l'unico esempio di strategia esibito nel film non ha nulla a che fare con Nash. Per una soluzione non maschilista di questo gioco rinvio a Dixit (Dixit e Skeath, 2004).

14.8 Realtà e soluzioni

Come abbiamo visto nei precedenti esempi, i concetti di soluzione sono diversi e possono portare a risultati talora coincidenti, talora no. L'uso di una soluzione piuttosto che di un'altra dipende dalla situazione reale; ad esempio quelle cooperative hanno senso solo se effettivamente applicabili (come non avviene nel caso di Cristiano IV di Danimarca) e sono condizionate dal fatto che l'utilità sia o meno trasferibile. Inoltre per rifarci ai nostri esempi può aver senso la cooperativa con minaccia nel caso militare, non certo in quello dei sessi. Infine l'utilizzo delle strategie miste è condizionato dal fatto che in realtà siano applicabili distribuzioni di probabilità, ad esempio in Giochi iterati; altrimenti sono più adatte le soluzioni pure di maxmin.

14.9 Riassunto delle soluzioni

Riassumiamo nelle fig. dalla 14.15 alla 14.19 le soluzioni dei cinque giochi sopra esaminati. Riportiamo le strategie non correlate.

Come si è spiegato nell'ambito delle soluzioni cooperative TU, i giocatori si accordano per adottare strategie che portano ad un punto corrispondente alla massima somma dei pagamenti e successivamente il giocatore più avvantaggiato trasferisce all'altro l'utilità in eccesso fino a raggiungere la soluzione indicata nella tavola.

SOLUZIONI DEL GIOCO 1			STRATEGIE PURE		STRATEGIE MISTE		PAGAMENTI
			x	y	x	y	
NASH EQUILIBRI PURI (v^E)			(1, 0)	(1, 0)			(-5, -5)
			(0, 1)	(0, 1)			(0, 0)
COMP. DI MAXMIN NELLE PURE (v^M)			(1, 0)	(1, 0)			(-5, -5)
COMPETITIVE		Classica (v^C)	(1, 0)	(1, 0)	(1, 0)	(1, 0)	(-5, -5)
		Minaccia (v^T)	(1, 0)	(1, 0)	(1, 0)	(1, 0)	(-5, -5)
COOP.	NTU	Classica (v^{CNTU})	(0, 1)	(0, 1)	(0, 1)	(0, 1)	(0, 0)
		Minaccia (v^{TNTU})	(0, 1)	(0, 1)	(0, 1)	(0, 1)	(0, 0)
	TU	Classica (v^{CTU})	(0, 1)	(0, 1)	(0, 1)	(0, 1)	(0, 0)
		Minaccia (v^{TTU})	(0, 1)	(0, 1)	(0, 1)	(0, 1)	(0, 0)

Figura 14.15: Soluzioni e pagamenti del gioco 1 (dilemma del terrorista).

SOLUZIONI DEL GIOCO 2			STRATEGIE PURE		STRATEGIE MISTE		PAGAMENTI
			x	y	x	y	
NASH EQUILIBRI PURI (v^E)			(0, 1)	(0, 1)			(1/3, 1/6)
COMP. DI MAXMIN NELLE PURE (v^M)			(0, 1)	(0, 1)			(1/3, 1/6)
COMPETITIVE		Classica (v^C)	(0, 1)	(0, 1)			(1/3, 1/6)
		Minaccia (v^T)	(0, 1)	(0, 1)			(1/3, 1/6)
COOP.	NTU	Classica (v^{CNTU})			non esiste		
		Minaccia (v^{TNTU})			non esiste		
	TU	Classica (v^{CTU})	(1, 0)	(0, 1)	(1, 0)	(0, 1)	(7/12, 5/12)
			(0, 1)	(1, 0)	(0, 1)	(1, 0)	
		Minaccia (v^{TTU})	(1, 0)	(0, 1)	(1, 0)	(0, 1)	(7/12, 5/12)
			(0, 1)	(1, 0)	(0, 1)	(1, 0)	

Figura 14.16: Soluzioni e pagamenti del gioco 2.

SOLUZIONI DEL GIOCO 3			STRATEGIE PURE		STRATEGIE MISTE		PAGAMENTI
			x	y	x	y	
NASH EQUILIBRI PURI (v^E)			non esiste				---
COMP. DI MAXMIN NELLE PURE (v^M)			non esiste				---
COMPETITIVE		Classica (v^C)			(1/6, 5/6)	(1/2, 1/2)	(5/3, 1)
		Minaccia (v^T)			(3/10, 7/10)	(3/5, 2/5)	(43/25,23/25)
COOP.	NTU	Classica (v^{CNTU})			(1/3, 2/3)	(0, 1)	(7/3, 4/3)
		Minaccia (v^{TNTU})			(9/25,16/25)	(0, 1)	(61/25, 32/25)
	TU	Classica (v^{CTU})	(1, 0)	(0, 1)	(1, 0)	(0, 1)	(17/6, 13/6)
		Minaccia (v^{TTU})	(1, 0)	(0, 1)	(1, 0)	(0, 1)	(29/10, 21/10)

Figura 14.17: Soluzioni e pagamenti del gioco 3.

SOLUZIONI DEL GIOCO 4			STRATEGIE PURE		STRATEGIE MISTE		PAGAMENTI
			x	y	x	y	
NASH EQUILIBRI PURI (v^E)			(1, 0)	(0, 1)			(-10, 0)
			(0, 1)	(1, 0)			(0, -10)
COMP. DI MAXMIN NELLE PURE (v^M)			(1, 0)	(1, 0)			(-10, -10)
COMPETITIVE		Classica (v^C)			(1, 0)	(1, 0)	(-10, -10)
		Minaccia (v^T)	(0, 1)	(0, 1)			(-∞, -∞)
COOP.	NTU	Classica (v^{CNTU})			non esiste		
		Minaccia (v^{TNTU})			non esiste		
	TU	Classica (v^{CTU})	(0, 1)	(1, 0)	(0, 1)	(1, 0)	(-5, -5)
			(1, 0)	(0, 1)	(1, 0)	(0, 1)	
		Minaccia (v^{TTU})	(0, 1)	(1, 0)	(0, 1)	(1, 0)	(-5, -5)
			(1, 0)	(0, 1)	(1, 0)	(0, 1)	

Figura 14.18: Soluzioni e pagamenti del gioco 4 (sorpasso).

SOLUZIONI DEL GIOCO 5			STRATEGIE PURE		STRATEGIE MISTE		PAGAMENTI
			x	y	x	y	
NASH EQUILIBRI PURI (v^E)			(0, 1)	(0, 1)			(-100, -100)
COMP. DI MAXMIN NELLE PURE (v^M)			(0, 1)	(0, 1)			(-100, -100)
COMPETITIVE		Classica (v^C)	(0, 1)	(0, 1)	(0, 1)	(0, 1)	(-100, -100)
		Minaccia (v^T)	(0, 1)	(0, 1)			(-100, -100)
COOP.	NTU	Classica (v^{CNTU})			α<75 (1, 0)	α<75 (75/(150-α),(75-α)/(150-α))	(-75, -75)
					α>75 (75/α,(α-75)/α)	α>75 (1, 0)	
		Minaccia (v^{TNTU})			α<75 (1, 0)	α<75 (75/(150-α),(75-α)/(150-α))	(-75, -75)
					α>75 (75/α,(α-75)/α)	α>75 (1, 0)	
	TU	Classica (v^{CTU})	(1, 0)	(1, 0)	(1, 0)	(1, 0)	(-75, -75)
			(1, 0)	(0, 1)	(1, 0)	(0, 1)	
			(0, 1)	(1, 0)	(0, 1)	(1, 0)	
		Minaccia (v^{TTU})	(1, 0)	(1, 0)	(1, 0)	(1, 0)	(-75, -75)
			(1, 0)	(0, 1)	(1, 0)	(0, 1)	
			(0, 1)	(1, 0)	(0, 1)	(1, 0)	

Figura 14.19: Soluzioni e pagamenti del gioco 5 (lotta all'inquinamento).

14.10 Come studiare un gioco

Riassumiamo le fasi di studio di un gioco a due persone a somma variabile:

- trovare gli equilibri di Nash;
- disegnare il gioco;
- cercare la soluzione di maxmin nelle strategie pure;
- calcolare la soluzione competitiva di Nash;
- calcolare la soluzione cooperativa (TU) di Nash utilizzando, per la determinazione di s, la matrice originaria;
- calcolare la soluzione cooperativa (NTU) di Nash utilizzando, per la determinazione del punto di tangenza con le iperboli riferite alla soluzione competitiva, la matrice originaria;
- calcolare la soluzione competitiva con minaccia di Nash utilizzando la matrice originaria;
- calcolare la soluzione cooperativa con minaccia (TU) di Nash utilizzando, per la determinazione di s, la matrice originaria;
- calcolare la soluzione cooperativa con minaccia (NTU) di Nash utilizzando, per la determinazione del punto di tangenza con le iperboli riferite alla soluzione competitiva con minaccia, la matrice originaria.

ESEMPIO

Risolvere il gioco in forma normale.

$A \backslash B$	m_1^B	m_2^B
m_1^A	(7, 3)	(5, 8)
m_2^A	(4, 7)	(6, 0)

RICERCA DEGLI EQUILIBRI DI NASH

$A \setminus B$	m_1^B	m_2^B
m_1^A	$(\underline{7}, 3)$	$(5, \underline{8})$
m_2^A	$(4, \underline{7})$	$(\underline{6}, 0)$

Considerata la prima colonna, sottolineo il numero di sinistra più alto (fra 7 e 4, sottolineo il 7). Lo stesso vale per la seconda colonna: considero il numero di sinistra più alto (fra 5 e 6, sottolineo il 6). Individuo poi la prima riga e considero il numero di destra più alto (fra 3 e 8, sottolineo 8). Ugualmente per la seconda riga (fra 7 e 0, sottolineo 7).

Ci sono casi in cui abbiamo "la doppia sottolineatura"? No! Pertanto, nelle strategie pure non ci sono Nash equilibri. Non essendoci Nash equilibri nelle strategie pure, alla domanda: "Quali sono Pareto-ottimali?" la risposta è, naturalmente: "nessuno". Qualora avessimo dei Nash-equilibri nelle strategie pure (strategie di equilibrio di Nash), la risposta la potremo dare solo una volta disegnata la frontiera Pareto-ottimale; nel senso che si dovrà verificare se tali punti appartengono o meno alla frontiera Pareto-ottimale.

RICERCA ED ESCLUSIONE DI DOMINANZE

Non ci sono dominanze né in orizzontale (I giocatore – numeri di sinistra) né in verticale (II giocatore – numeri di destra). Se avessimo trovato dominanze, le avremmo eliminate arrivando velocemente alla soluzione.

Troviamo ore le soluzioni competitive classiche (soluzioni competitive di Nash).

MAXMIN NELLE STRATEGIE PURE

	m_1^B	m_2^B	min di A	
m_1^A	(7, 3)	(5, 8)	5	← Max-min di A
m_2^A	(4, 7)	(6, 0)	4	
min di B	3	0		
	↑			
	Max-min di B			

Nei giochi a somma variabile, anche se vi è un punto di convergenza nelle mosse di maxmin, le strategie miste possono migliorarlo per entrambi i giocatori. Quindi procediamo.

SOLUZIONE COMPETITIVA CLASSICA DI NASH

a_{11}, b_{11}	a_{12}, b_{12}
a_{21}, b_{21}	a_{22}, b_{22}

$$D_1 = a_{21} - a_{11} - a_{22} + a_{12} \qquad D_2 = b_{21} - b_{11} - b_{22} + b_{12}$$
$$x_1 = (a_{21} - a_{22})/D_1 \qquad y_1 = (b_{12} - b_{22})/D_2$$
$$x_2 = 1 - x_1 \qquad y_2 = 1 - y_1$$
$$v_1 = x_1 y_1 a_{11} + x_1 y_2 a_{12} + x_2 y_1 a_{21} + x_2 y_2 a_{22} \qquad v_2 = x_1 y_1 b_{11} + x_1 y_2 b_{12} + x_2 y_1 b_{21} + x_2 y_2 b_{22}$$

$$D_1 = 4 - 7 - 6 + 5 = -4 \qquad D_2 = 7 - 3 - 0 + 8 = 12$$
$$x_1 = (4 - 6)/(-4) = 1/2 \qquad y_1 = (8 - 0)/12 = 2/3$$
$$x_2 = 1 - x_1 = 1/2 \qquad y_2 = 1 - y_1 = 1/3$$
$$v_1 = 7/3 + 5/6 + 4/3 + 1 = 11/2 \qquad v_2 = 1 + 4/3 + 7/3 + 0 = 14/3$$

ATTENZIONE: Qualora D = 0 occorre passare alle strategie pure. Analogamente occorre adottare le strategie pure per il giocatore che ottiene x o y fuori dall'intervallo $[0, 1]$.

	m_1^B	m_2^B	min di A	
m_1^A	(7, 3)	(5, 8)	5	← Max-min di A
m_2^A	(4, 7)	(6, 0)	4	
min di B	3	0		
	↑			
	Max-min di B			

Segue una descrizione particolareggiata. Se $D_1 = 0$, allora la soluzione per il primo giocatore è la sua mossa di maxmin nelle strategie pure. Altrimenti, posto $x_1 = (a_{21} - a_{22})/D_1$, si ha:

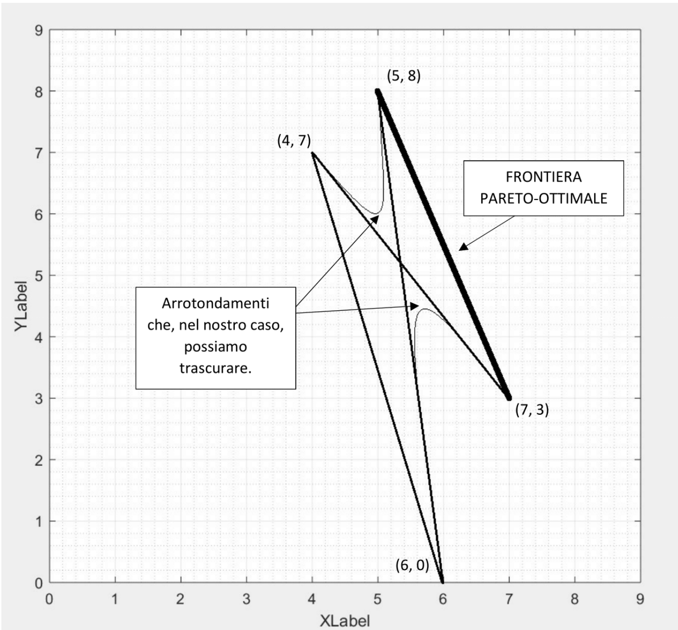
$$x = \begin{cases} (x_1, x_2 = 1 - x_1) \ \textit{se} \ 0 \leq x_1 \leq 1 \\ \textit{la mossa di maxmin del giocatore } A, \ \textit{altrimenti}. \end{cases}$$

Si procede analogamente per ottenere le strategie del secondo giocatore: se $D_2 = 0$, allora la soluzione per il secondo giocatore è la sua mossa di maxmin nelle strategie pure. Altrimenti, posto $y_1 = (b_{12} - b_{22})/D_2$ si ha:

$$y = \begin{cases} (y_1, y_2 = 1 - y_1) \ \textit{se} \ 0 \leq y_1 \leq 1 \\ \textit{la mossa di maxmin del giocatore } B, \ \textit{altrimenti}. \end{cases}$$

SOLUZIONE COOPERATIVA CLASSICA DI NASH (NTU)

Partendo dalla bi-matrice iniziale (che da ora chiameremo semplicemente matrice), congiungiamo con segmenti le coppie di punti (intesi come coordinate cartesiane) che corrispondono alle righe della matrice. Congiungiamo poi i punti che, nella matrice, sono sulla stessa colonna. Tralasciando gli arrotondamenti che qui non considereremo, otterremo il grafico che segue:

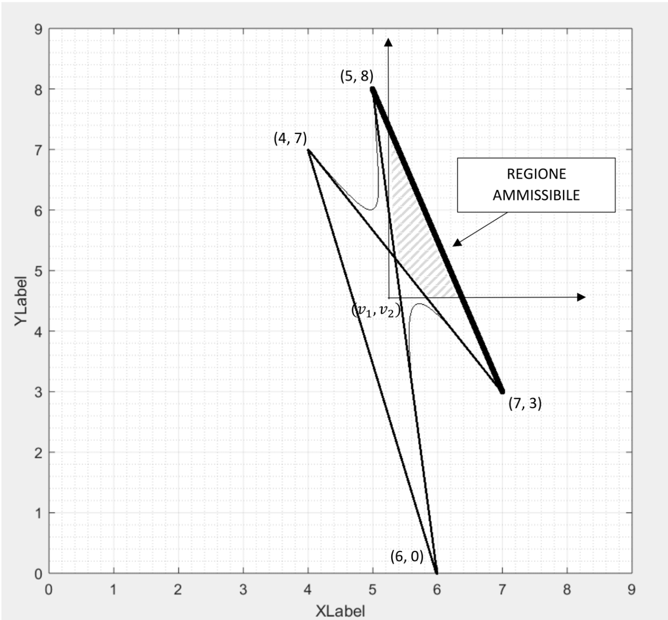


I vertici della figura corrispondono ai pagamenti raggiungibili con le strategie pure. Una volta disegnato il grafico individuiamo la frontiera Pareto-ottimale (nel nostro caso il segmento nero spesso).

Posizioniamo inoltre i nuovi assi aventi origine nel punto di coordinate $v_1 = 11/2$ e $v_2 = 14/3$ (soluzione competitiva classica di Nash).

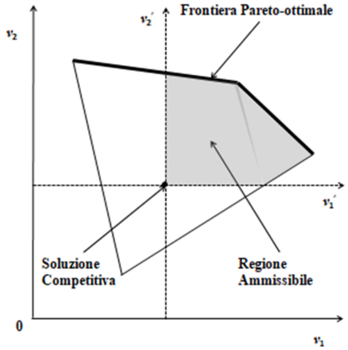
È sempre utile in queste circostanze fare riferimento al cosiddetto "*Metodo Spannometrico*" al fine di trovare la frontiera Pareto-ottimale.

Notiamo che i nuovi assi delimitano una regione ammissibile in cui è rispettata la "razionalità individuale", cioè ove i pagamenti non sono inferiori a quelli che ciascuno otterrebbe con la soluzione competitiva ($v_1 = 11/2, v_2 = 14/3$).

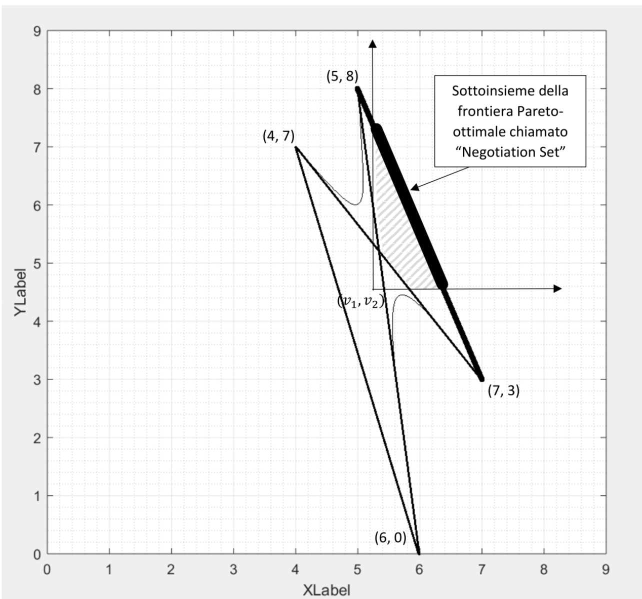


Osserviamo inoltre che, agli effetti di una soluzione cooperativa del gioco, qualsiasi punto interno alla regione ammissibile è da scartare, perché ne esiste un altro più in alto a destra che è migliore per entrambi i giocatori. In sostanza dovremo considerare un "sottoinsieme" della **frontiera Pareto-ottimale individuata dai nuovi assi**. Questo "sottoinsieme" della frontiera Pareto-ottimale individuato dei nuovi assi, viene anche chiamato "Negotiation Set".

In precedenza non è stato introdotto questo termine in quanto insita nel discorso la considerazione di un opportuno sottoinsieme della frontiera Pareto-ottimale (si veda la figura seguente).

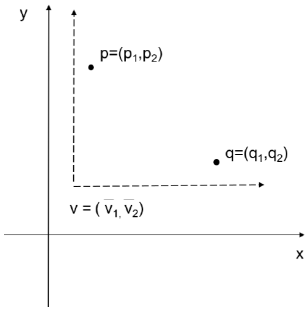


Nel nostro caso i nuovi assi individueranno quindi una parte del segmento nero spesso (frontiera Pareto-ottimale), che abbiamo tagliato (Negotiation Set).



Pertanto, dovremo cercare la tangenza del "Negotiation Set" e il fascio di iperboli equilatere riferite agli assi con origine nella soluzione competitiva nelle strategie miste.

Calcoliamo la soluzione cooperativa classica di Nash (NTU) nel modo seguente.



$$\begin{cases} \dfrac{y-p_2}{q_2-p_2} = \dfrac{x-p_1}{q_1-p_1} \\ (x-\bar{v}_1)(y-\bar{v}_2) = k \\ \Delta = 0 \end{cases}$$

$p = (p_1, p_2) = (5, 8)$
$q = (q_1, q_2) = (7, 3)$
$v_1 = 11/2$
$v_2 = 14/3$

$$\begin{cases} \dfrac{y-8}{3-8} = \dfrac{x-5}{7-5} \\ \left(x - \dfrac{11}{2}\right)\left(y - \dfrac{14}{3}\right) = k \\ \Delta = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -\dfrac{5}{2}x + \dfrac{41}{2} \\ \left(x - \dfrac{11}{2}\right)\left(y - \dfrac{14}{3}\right) = k \\ \Delta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -\dfrac{5}{2}x + \dfrac{41}{2} \\ \left(x - \dfrac{11}{2}\right)\left(-\dfrac{5}{2}x + \dfrac{41}{2} - \dfrac{14}{3}\right) = k \\ \Delta = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -\dfrac{5}{2}x + \dfrac{41}{2} \\ \left(x - \dfrac{11}{2}\right)\left(-\dfrac{5}{2}x + \dfrac{95}{6}\right) = k \\ \Delta = 0 \end{cases}$$

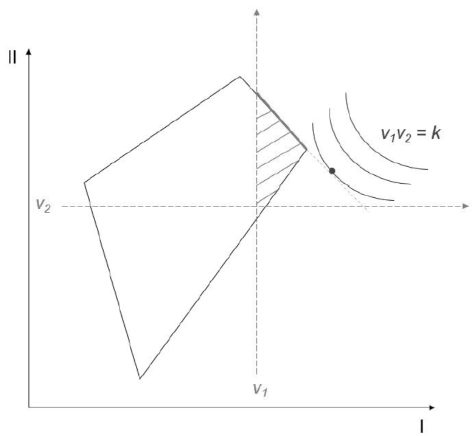
$$\begin{cases} y = -\frac{5}{2}x + \frac{41}{2} \\ \frac{5}{2}x^2 - \frac{355}{12}x + \frac{1045}{12} - k = 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$$

Considerando che $\Delta = 0 \to x = -\frac{b}{2a}$.

$$x = \frac{\frac{355}{12}}{5} = \frac{355}{12 \times 5} = \frac{71}{12} \quad y = -\frac{5}{2} \times \frac{71}{12} + \frac{41}{2} = \frac{137}{24}$$

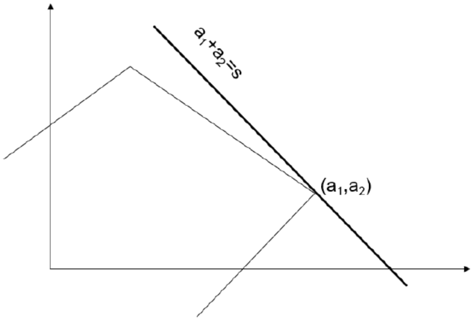
Pertanto, il punto di tangenza ha coordinate: 71/12 e 137/24. Notiamo che è sulla frontiera Pareto-ottimale.

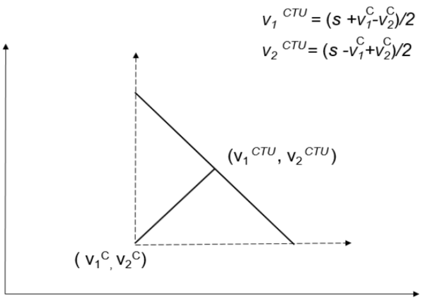
Avvertenza: può capitare che il punto di tangenza tra l'iperbole e la retta cui appartiene il Negotiation Set sia esterno al "segmento del Negotiation Set" (si veda figura sotto). In tal caso quel punto va scartato e sostituito con il vertice più vicino. Nell'esercizio in esame, il punto di tangenza non può che trovarsi sul segmento relativo alla Negotiation Set perché tale segmento si estende sull'intero primo quadrante dei nuovi assi.



SOLUZIONE COOPERATIVA CLASSICA DI NASH (TU)

A è l'insieme dei vertici della frontiera Pareto-ottimale.
$\underline{a} = (a_1, a_2)$ è un elemento generico di A.
$s = \max(a_1 + a_2)$, $\underline{a} \in A$.





(v_1^{CTU}, v_2^{CTU}) Soluzione cooperativa classica TU.
(v_1^C, v_2^C) Soluzione competitiva classica di Nash.

$s = 5 + 8 = 13$
$v_1 = 11/2$
$v_2 = 14/3$

$$v_1^{CTU} = \frac{x + v_1^C - v_2^C}{2} = \frac{13 + \frac{11}{2} - \frac{14}{3}}{2} = \frac{83}{12}$$
$$v_2^{CTU} = \frac{x - v_1^C + v_2^C}{2} = \frac{13 - \frac{11}{2} + \frac{14}{3}}{2} = \frac{73}{12}$$

Si ricorda che se la regione ammissibile presenta concavità nella regione di NE, allora non esiste soluzione NTU; invece, la soluzione TU c'è sempre e dunque va sempre trovata!

SOLUZIONI CON MINACCIA DI NASH

Calcoliamo la "matrice differenza":

A \ B	m_1^B	m_2^B
m_1^A	$(7 - 3 = 4)$	$(5 - 8 = -3)$
m_2^A	$(4 - 7 = -3)$	$(6 - 0 = 6)$

Gioco a somma zero.

A \ B	m_1^B	m_2^B
m_1^A	4	-3
m_2^A	-3	6

RICERCA ED ESCLUSIONE DI DOMINANZE

Notiamo che non ci sono dominanze in "orizzontale" e nemmeno in "verticale".

MAX MIN NELLE STRATEGIE PURE

Calcoliamo il max-min nelle strategie pure.

Se nel gioco a somma zero troviamo un punto di sella, allora abbiamo già trovato la soluzione del gioco a somma zero.

	m_1^B	m_2^B	min di A	
m_1^A	4	-3	-3	← Max-min di A
m_2^A	-3	6	-3	
min di B	4	6		
	↑ Max-min di B			

Non avendo trovato un punto di sella, occorre procedere con le formule relative ai giochi a somma zero.

SOLUZIONE COMPETITIVA CON MINACCIA DI NASH

A \ B	y_1	y_2
x_1	a_{11}	a_{12}
x_2	a_{21}	a_{22}

$$\frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

Player A	Player B
$D_1 = a_{12} + a_{21} - a_{11} - a_{22}$	$D_2 = -D_1$
$x_1 = (a_{21} - a_{22})/D_1$	$y_1 = (a_{22} - a_{12})/D_2$
$x_2 = 1 - x_1$	$y_2 = 1 - y_1$
$D_1 = -16$	$D_2 = -D_1 = 16$
$x_1 = 9/16$	$y_1 = 9/16$
$x_2 = 1 - x_1 = 7/16$	$y_2 = 7/16$

In generale x_1 e x_2 sono differenti da y_1 e y_2 rispettivamente.

A questo punto andiamo a riprendere la matrice iniziale in modo da determinare i pagamenti del primo e del secondo giocatore.

		9/16	7/16
		m_1^B	m_2^B
9/16	m_1^A	(7, 3)	(5, 8)
7/16	m_2^A	(4, 7)	(6, 0)

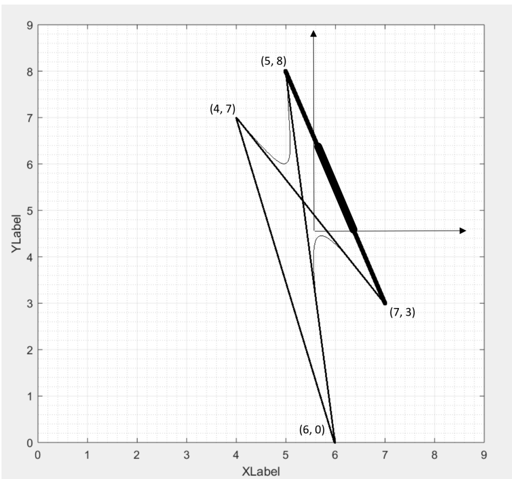
A questo punto la vincita competitiva con minaccia:

$$v_1^T = (\frac{9}{16} \times \frac{9}{16} \times 7) + (\frac{9}{16} \times \frac{7}{16} \times 5) + (\frac{7}{16} \times \frac{9}{16} \times 4) + (\frac{7}{16} \times \frac{7}{16} \times 6) = \frac{357}{64}$$

$$v_2^T = (\frac{9}{16} \times \frac{9}{16} \times 3) + (\frac{9}{16} \times \frac{7}{16} \times 8) + (\frac{7}{16} \times \frac{9}{16} \times 7) + (\frac{7}{16} \times \frac{7}{16} \times 0) = \frac{297}{64}$$

SOLUZIONE COOPERATIVA CON MINACCIA DI NASH (NTU – utilità non trasferibile)

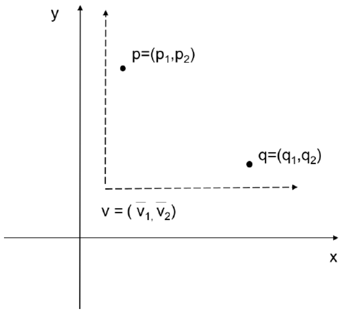
Posizioniamo i nuovi assi aventi origine nel punto 357/64, 297/64.



Notiamo che:

$p = (p_1, p_2) = (5, 8)$
$q = (q_1, q_2) = (7, 3)$
$v_1 = 357/64$
$v_2 = 297/64$

A questo punto si applicano le formule già viste precedentemente.



$$\begin{cases} \dfrac{y-p_2}{q_2-p_2} = \dfrac{x-p_1}{q_1-p_1} \\ (x-\bar{v}_1)(y-\bar{v}_2) = k \\ \Delta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{y-8}{3-8} = \dfrac{x-5}{7-5} \\ \left(x - \dfrac{357}{64}\right)\left(y - \dfrac{297}{64}\right) = k \\ \Delta = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -\dfrac{5}{2}x + \dfrac{41}{2} \\ \left(x - v_1\right)\left(y - v_2\right) = k \\ \Delta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{y-8}{3-8} = \dfrac{x-5}{7-5} \\ \left(x - \dfrac{357}{64}\right)\left(-\dfrac{5}{2}x + \dfrac{41}{2} - v_2\right) = k \\ \Delta = 0 \end{cases}$$

Consideriamo per ora la seconda equazione del sistema.

$$-\frac{5}{2}x^2 + \frac{41}{2}x - v_2x + \frac{5}{2}v_1x - \frac{41}{2}v_1 + v_1v_2 - k = 0$$

$$-\frac{5}{2}x^2 + \Big(\frac{41}{2} - v_2 + \frac{5}{2}v_1\Big)x - \frac{41}{2}v_1 + v_1v_2 - k = 0$$

Considerando che $\Delta = 0$ avremo $x = -\frac{b}{2a}$.

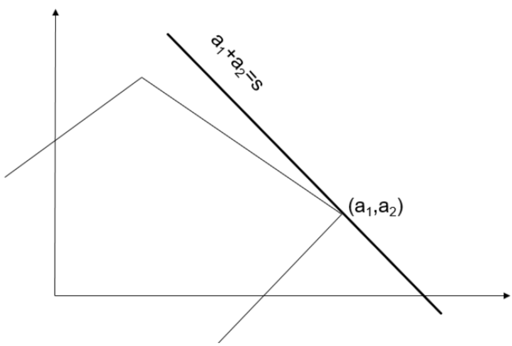
$$x = \frac{\frac{41}{2} - v_2 + \frac{5}{2}v_1}{5} = \frac{\frac{41}{2} - \frac{297}{64} + \frac{5}{2} \times \frac{357}{64}}{5} =$$

$$= \frac{\frac{2624 - 594 + 1785}{128}}{5} = \frac{763}{128}$$

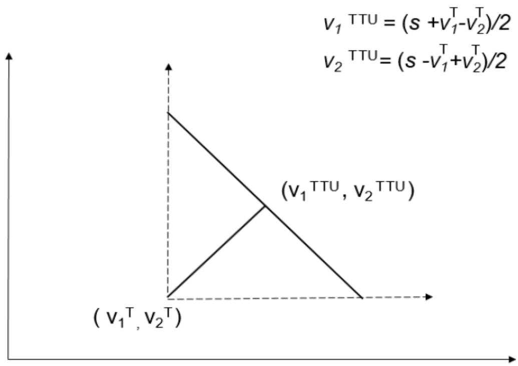
$$y = -\frac{5}{2}x + \frac{41}{2} = -\frac{5}{2} \times \frac{763}{128} + \frac{41}{2} = \frac{-3815 + 5248}{256} = \frac{1433}{256}$$

Osserviamo che il punto appena determinato cade sulla frontiera a destra in alto della regione Pareto-ottimale (segmento in grassetto, quello che in questo esercizio chiamiamo Negotiation Set).

SOLUZIONE COOPERATIVA CON MINACCIA DI NASH (TU - Utilità Trasferibile)



A è l'insieme dei vertici della frontiera Pareto-ottimale.
$\underline{a} = (a_1, a_2)$ è un elemento generico di A.
$s = \max(a_1 + a_2)$, $\underline{a} \in A$.



(v_1^{TTU}, v_2^{TTU}) Soluzione cooperativa con minaccia TU.
(v_1^T, v_2^T) Soluzione competitiva con minaccia.

$s = 5 + 8 = 13$

$v_1 = 357/64$

$v_2 = 297/64$

$$v_1^{TTU} = \frac{s + v_1^T - v_2^T}{2} = \frac{13 + \frac{357}{64} - \frac{297}{64}}{2} = \frac{223}{32}$$
$$v_2^{TTU} = \frac{s - v_1^T + v_2^T}{2} = \frac{13 - \frac{357}{64} + \frac{297}{64}}{2} = \frac{193}{32}$$

Anche in questo caso si ricorda che se la regione ammissibile presenta concavità nella regione di NE, allora non esiste soluzione NTU; invece, la soluzione TU c'è sempre e va trovata!

ESERCIZI

Esercizio nr. 1:
Un modello di marketing più vicino alla realtà

Riprendiamo in esame il problema del marketing proposto nel paragrafo 10.1 e modifichiamo le regole nel modo seguente.

Poniamo che se una ditta fa un investimento su una piazza, mentre l'altra non investe niente, il profitto lordo per la vincitrice sia di 500.000 dollari. Il profitto netto si otterrà sottraendo dai 500.000 dollari l'importo che la ditta ha investito in pubblicità; l'altra vincerà zero. Se invece entrambe le ditte investono su tutte e due le piazze, il profitto lordo per ognuna sarà calcolato in proporzione alle quote investite su ciascuna piazza. I profitti netti si calcoleranno come sopra.

A titolo di esempio, rappresentiamo nella Tavola seguente i calcoli necessari per stabilire le vincite delle due ditte A e B nel caso che A investa 400.000 dollari sulla prima piazza e niente sulla seconda, mentre B investa 200.000 dollari sulla prima e niente sulla seconda. Le cifre nella Tavola sono espresse in migliaia di dollari (P. L.: Profitto Lordo; S. P.: Spesa Pubblicità).

Vincita di A			
I		*II*	
P. L.	S. P.	P. L.	S. P.
333	-400	0	0
Profitto netto totale: $-67 + 0 = -67$			

Vincita di B			
I		*II*	
P. L.	S. P.	P. L.	S. P.
167	-200	0	0
Profitto netto totale: $-33 + 0 = -33$			

Per capire la ripartizione del profitto lordo ottenuto sulla prima piazza, notiamo che:

$$400 : 200 \sim 333 : 167 \text{ e } 333 + 167 = 500.$$

Diamo nella tabella sottostante la bi-matrice dei pagamenti risultante. L'esercizio consiste in:

- cogliere e giustificare le simmetrie in tale bi-matrice;
- escludere le strategie dominate (di riga e di colonna);
- nella matrice risultante (che si ridurrà ad una sola colonna) individuare la strategia ottima di A e le conseguenti vincite per A e per B.

		I 200	II 0	I 100	II 100	I 0	II 200
I 400	II 0	-67	-33	0	400	100	300
300	100	400	0	225	175	267	133
200	200	350	50	266	124	350	50
100	300	267	133	225	275	400	0
0	400	100	300	0	400	-67	-33

Esercizio n. 2:
Il problema del disarmo: "Si vis pacem, para bellum" (se vuoi la pace, prepara la guerra)

Supponiamo che vi siano due grandi potenze in grado di controllare, più o meno direttamente, i punti-chiave del quadro strategico mondiale. Il problema per ciascuno di tali giocatori sia quello di potenziare (P) o non potenziare (NP) i propri armamenti attraverso la costruzione di una nuova arma, rivoluzionaria rispetto a quelle esistenti attualmente.

Se entrambi, o se nessuno, li potenzia, ne risulterà una situazione di equilibrio in cui nessuno attacca l'altro. Se invece uno dei due lo fa e l'altro no, si crea una situazione di disequilibrio che indurrà il paese meglio armato ad attaccare, vincendo.

Detto C il costo della nuova arma, ipotizziamo che il guadagno netto conseguente da un'eventuale vittoria possa essere quantificato in nC (con n reale maggiore di 1), mentre la perdita conseguente a una sconfitta sia $-\infty$.

Costruire la bi-matrice dei pagamenti e risolvere completamente il gioco, utilizzando un passaggio al limite, partendo dalla sostituzione di $-\infty$ con z.

Concludiamo gli esercizi di questo capitolo invitando il lettore a risolvere i seguenti giochi classici.

Esercizio n. 3:
Il dilemma del prigioniero

B / A	coopera	non coopera
coopera	3, 3	1, 4
non coopera	4, 1	2, 2

Esercizio n. 4

B / A	cede	non cede
cede	3, 3	2, 4
non cede	4, 1	2, 2

Esercizio n. 5

Questo gioco deve la sua notorietà come gioco dell'imitazione (imitation game) perché fu utilizzato in una particolare versione da Alan Turing (1950) in un articolo che affrontava il problema dell'intelligenza artificiale.

B / A	coopera	non coopera
coopera	4, 4	1, 2
non coopera	2, 1	3, 3

Esercizio n. 6

B / A	coopera	non coopera
coopera	4, 4	1, 3
non coopera	3, 1	2, 2

Esercizio n. 7

Trovare i Nash equilibri in funzione di α.

	B	S
B	α, 1	0, 0
S	0, 0	1, α

Risolvere l'esercizio dopo aver sostituito 1 con qualsiasi $\beta > 0$.

Risolvere l'esercizio dopo aver sostituito nella bimatrice originale α con $1/\alpha$ (ove $\alpha > 0$).