Capitolo 1

Elementi introduttivi alla matematica finanziaria

SOMMARIO: 1.1. L'oggetto della matematica finanziaria classica. – 1.2. La prestazione finanziaria. Le relazioni di preferenza e di indifferenza. – 1.2.1. L'aspetto soggettivo delle preferenze. – 1.2.2. Aspetti oggettivi delle leggi finanziarie. Il principio di equivalenza. – 1.3. L'aspetto dimensionale delle grandezze finanziarie.

1.1. *L'oggetto della matematica finanziaria classica*

Oggetto della matematica finanziaria classica è la formalizzazione dello scambio fra importi monetari pagabili in epoche diverse e dei calcoli connessi alla valutazione degli impegni relativi ad operazioni riguardanti un insieme di movimenti monetari.

Le causali di tali movimenti possono essere di varia natura, connesse a fatti personali, aziendali, ecc., di natura patrimoniale (es.: variazioni di attività o di passività) o economica (es.: costi o ricavi), relative ad iniziative riguardanti beni e servizi di qualsiasi tipo. Ma di tali operazioni questa branca della matematica applicata considera soltanto la contropartita monetaria per valori di cassa o assimilati [1].

Le valutazioni si fondano su equivalenze fra importi diversi, pagati in tempi diversi, in condizioni di certezza o di incertezza. In questo volume ci limiteremo a trattare la Matematica Finanziaria in un contesto deterministico, assumendo che i movimenti monetari in entrata ed in uscita (detti indistintamente "pagamenti") avverranno certamente nei tempi e nell'ammontare prefissato. Lasceremo quindi ad altra sede gli

[1] Il lettore che conosca gli elementi di contabilità e le regole della "partita doppia" sa che ogni movimento monetario trova una contropartita reale di segno opposto: così un versamento all'epoca x (prestazione finanziaria *negativa)* trova contropartita nella accensione di un credito o nell'eliminazione di un debito (o, più in generale, in una variazione patrimoniale *positiva*) o anche nella copertura di un costo per acquisizione di servizi; analogamente ad un incasso (prestazione finanziaria *positiva*) corrisponde una variazione patrimoniale *negativa* o un ricavo per fornitura di servizi. Pertanto il punto di vista che consideriamo nella matematica finanziaria sottintende i rapporti sottostanti e le cause economiche delle prestazioni finanziarie.

argomenti di *teoria delle decisioni in condizioni di incertezza,* che comprende la *matematica attuariale* e più in generale la *teoria delle operazioni finanziarie aleatorie*[2].

Supponendo d'ora innanzi valide, salvo contrario espresso avviso, le ipotesi di certezza, assumeremo qui – in armonia a regole di comportamento economico comunemente accettate – che:

a) il possesso di un capitale (= ammontare esprimibile in moneta) è vantaggioso, ossia ogni soggetto preferisce avere tale bene anziché non averlo, quale che sia l'importo;

b) la disponibilità temporanea di un capitale altrui o l'uso di un capitale proprio è un servizio vantaggioso che, come tale, ha un prezzo; pertanto è equo che chi si avvale di tale disponibilità (utile a fini di produzione, di consumo, di riserva per sicurezza, ecc.) paghi un costo, commisurato all'ammontare del capitale nonché agli elementi temporali (le date di inizio e di termine dell'utilizzazione, o soltanto la sua durata).

L'ammontare del predetto costo è chiamato *interesse.* I parametri per il suo calcolo risultano in concreto determinati con le regole tratte dalla teoria economica.

1.2. *La prestazione finanziaria. Le relazioni di preferenza e di indifferenza*

1.2.1. *L'aspetto soggettivo delle preferenze*

Denominiamo *prestazione finanziaria* un *importo datato,* ossia un prefissato importo da collocare ad una data scadenza di pagamento. Formalmente una prestazione può rappresentarsi con una coppia ordinata (X, S) dove S = *importo* monetario (trasferito o comunque contabilizzato da un soggetto ad un altro), X = *epoca* di scadenza.

Riferendosi ad una delle parti contrattuali, S è dotato di segno algebrico riferito al movimento di cassa, quindi positivo se trattasi di incasso e negativo se trattasi di esborso[3], e l'unità di misura dipende dalla moneta prescelta. Inoltre le epoche (o

---

[2] Nelle situazioni concrete considerate certe, l'incertezza è presente come elemento patologico. Di essa si può tener conto attraverso la maggiorazione di alcuni parametri di rendimento o con altri artifici piuttosto che con l'introduzione negli schemi formali di elementi probabilistici. Questi ultimi vanno invece esplicitamente considerati quando l'incertezza è un carattere fondamentale del problema (ad es. nella teoria delle decisioni in ambiente incerto e in particolare nella matematica attuariale). Va precisato che nell'evoluzione recente della disciplina la predetta distinzione, e così pure quella tradizionale fra "matematica finanziaria" e "matematica attuariale", vede ridursi il suo peso, data la crescente considerazione di aspetti aleatori nelle problematiche finanziarie.

[3] Si parla spesso di "ricavo" in luogo di "incasso" e di "costo" in luogo di "esborso", anche se, a rigore, quei termini sono tecnicamente impropri giacché sono riferiti a variazioni economiche anziché a movimenti finanziari.

istanti, o tempi) possono interpretarsi come ascisse di punti su un asse dei tempi orientato in modo da avere un ordinamento cronologico. L'origine dei tempi è un qualsiasi istante, fissato in modo ampiamente discrezionale e l'unità di misura è solitamente l'anno (ma può scegliersi una durata diversa). Pertanto anche le epoche di scadenza X, Y, ... sono dotate di segno algebrico, negativo o positivo a seconda che esse siano anteriori o posteriori all'origine dei tempi. Ne consegue che "$X < Y$" significa "epoca X anteriore all'epoca Y".

Da un punto di vista geometrico, introduciamo nel piano $\sum^{(2)}$ il riferimento cartesiano ortogonale OXS (con ascisse X e ordinate S). $\sum^{(2)}$ è allora costituito dai punti $P = [X, S]$ che rappresentano le prestazioni (X, S), ossia gli importi S datati in X.

In conseguenza dei postulati *a* e *b* si ricavano i seguenti criteri operativi:

c. date due prestazioni finanziarie (X, S_1) e (X, S_2) alla stessa epoca X, è preferita quella di importo (algebricamente) maggiore.

d. date due prestazioni finanziarie (X, S) e (Y, S) aventi il medesimo importo S e valutate in un istante Z anteriore a X e Y, se $S > 0$ (ossia dal punto di vista di chi incassa) è preferita la prestazione la cui scadenza (futura) è più vicina a Z; se $S < 0$ (ossia dal punto di vista di chi paga) è preferita la prestazione la cui scadenza (futura) è più lontana da Z. Più in generale $\forall Z$[4], a parità d'importo, chi incassa preferisce la prestazione a scadenza anteriore, chi paga preferisce quella a scadenza posteriore.

Le formulazioni *c* e *d* esprimono *criteri di preferenza assoluta* nelle scelte finanziarie e chiariscono altresì il significato dell'interesse. Infatti, con riferimento alle operazioni di prestito monetario, con cui il *lender* (ossia chi dà a prestito) cede al *borrower* (ossia chi prende in prestito) la disponibilità di propri capitali monetari e le conseguenti possibili utilizzazioni per tutta la durata del prestito, il *lender* farebbe un'operazione svantaggiosa (in base ai postulati *a* e *b* ed al criterio *d* che ne discende) qualora il *borrower* alla restituzione del capitale prestato al termine fissato non aggiungesse una prestazione finanziaria di importo generalmente positivo a favore del *lender*, che abbiamo denominato *interesse,* avente la natura di prezzo del servizio reso. I decisori applicano quindi comportamenti fondati su criteri di preferenza o di indifferenza, di natura soggettiva.

Se si vogliono approfondire tali aspetti, si può osservare quanto segue.

Fra coppie di prestazioni finanziarie possono definirsi le relazioni soggettive di *preferenza debole*, *indifferenza* e *preferenza forte* con il seguente significato:

– il soggetto decisore esprime un giudizio di *preferenza debole*, indicata con $\succeq$, della prestazione (X_1, S_1) rispetto a (X_2, S_2) se egli non ritiene la seconda più vantaggiosa della prima. In formula: $(X_1, S_1) \succeq (X_2, S_2)$;

[4] È noto che $\forall$ indica il "quantificatore universale" e si legge "per ogni".

– il soggetto decisore esprime un giudizio di *indifferenza*, indicata con $\approx$, della prestazione (X_1, S_1) rispetto a (X_2, S_2) se egli ha simultaneamente un giudizio di preferenza debole di (X_1, S_1) rispetto a (X_2, S_2) e di (X_2, S_2) rispetto a (X_1, S_1). In formula:

$$(X_1, S_1) \approx (X_2, S_2) \Leftrightarrow [(X_1, S_1) \succeq (X_2, S_2)] \cap [(X_2, S_2) \succeq (X_1, S_1)];$$

– il soggetto decisore esprime un giudizio di *preferenza forte*, indicato con $\succ$, della prestazione (X_1, S_1) rispetto a (X_2, S_2) se ritiene la prima più vantaggiosa della seconda. In formula: $(X_1, S_1) \succ (X_2, S_2)$ [5].

Ciò posto, l'ampiezza dell'insieme delle prestazioni confrontabili con un'assegnata prestazione per un giudizio di preferenza dipende dai criteri che sono alla base del giudizio. In particolare i criteri *c* e *d* consentono di stabilire la preferenza o meno di (X_0, S_0) solo rispetto ad una parte delle possibili prestazioni, come subito evidenziamo.

Da un punto di vista geometrico, la assegnata prestazione (X_0, S_0) sia rappresentata sul piano $\sum^{(2)}$, con il riferimento OXS, dal punto $P_0 \equiv [X_0, S_0]$. Allora, considerando i quattro quadranti adiacenti a P_0, in base ai soli criteri *c* e *d* risulta che:

1. se $S_0 > 0$ (e confrontando con prestazioni aventi importi positivi; cfr. Figura 1.1), trattandosi di incassi conviene anticiparne l'acquisizione; pertanto a P_0 sono preferiti tutti i punti $P_2 \equiv [X_2, S_2]$ del 2° quadrante (*NW*) perché essi hanno incassi S_2 maggiori di S_0 e disponibili in epoche X_2 anteriori a X_0, mentre P_0 è preferito a tutti i punti $P_4 \equiv [X_4, S_4]$ del 4° quadrante (*SE*) perché essi hanno incassi S_4 minori di S_0 e disponibili in epoche X_4 posteriori a X_0.

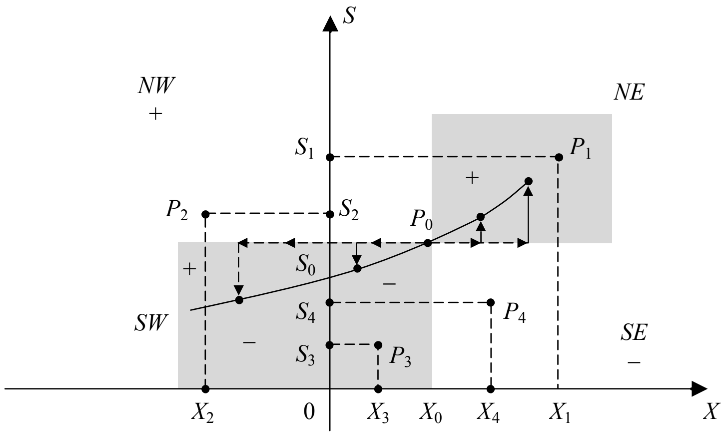

Figura 1.1.

[5] Dalle precedenti definizioni risulta che:
– preferenza debole = preferenza forte o indifferenza;
– indifferenza = non preferenza forte di una prestazione rispetto ad un'altra.
La logica economica che sta alla base dei postulati *a, b* da cui discendono i criteri *c, d* implica che gli importi di prestazioni indifferenti abbiano lo stesso segno (o siano entrambi nulli).

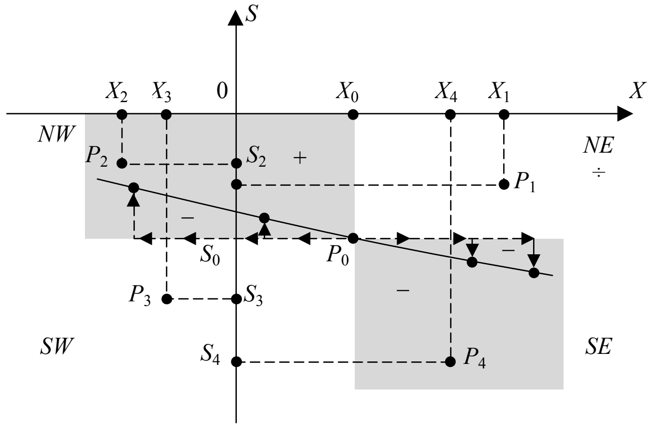

Figura 1.2.

Invece non si può concludere nulla circa le preferenze fra i punti (rappresentativi di prestazioni) P_0 e i punti $P_1 \equiv [X_1, S_1]$ del 1° quadrante (*NE*) o i punti $P_3 \equiv [X_3, S_3]$ del 3° quadrante (*SW*);

2. se $S_0 < 0$ (e confrontando con prestazioni aventi importi negativi; cfr. Figura 1.2), trattandosi di esborsi conviene ritardarne la scadenza; pertanto a P_0 sono preferiti tutti i punti $P_1 \equiv [X_1, S_1]$ del 1° quadrante (*NE*) perché essi hanno esborsi S_1 minori di S_0 e pagabili in epoche X_1 posteriori a X_0, mentre P_0 è preferito a tutti i punti $P_3 \equiv [X_3, S_3]$ del 3° quadrante (*SW*) perché essi hanno esborsi S_3 maggiori di S_0 e pagabili in epoche X_3 posteriori a X_0.

Invece non si può concludere nulla circa le preferenze fra P_0 e i punti $P_2 \equiv [X_2, S_2]$ del 2° quadrante (*NW*) o i punti $P_4 \equiv [X_4, S_4]$ del 4° quadrante (*SE*).

In breve, nelle zone non ombreggiate delle Figure 1.1 e 1.2 si può stabilire la preferenza forte oppure no rispetto a P_0, mentre per quelle ombreggiate manca la possibilità di tale confronto.

In sintesi, individuando le prestazioni *(X, S)* anche con i punti $P \equiv [X, S]$ del piano *OXS*, osserviamo che un operatore che segue soltanto i criteri *c* e *d* per la valutazione ed il confronto di prestazioni finanziarie può selezionare alcune prestazioni *P′ dominanti* la preassegnata P_0 (si ha dominanza di *P′* su P_0 quando l'operatore preferisce *P′* a P_0) ed altre prestazioni *P″ dominate* da P_0 (ossia quando egli preferisce P_0 a *P″*), ma la confrontabilità con P_0 è *incompleta* giacché esistono infinite prestazioni *P‴* non confrontabili con P_0 in base ai criteri *c* e *d*. Per rendere *completa* la confrontabilità di P_0 con l'insieme di tutte le prestazioni finanziarie, corrispondente alla totalità dei punti del piano riferito a *OXS*, occorre aggiungere ai criteri *c* e *d* – che discendono da comportamenti generali circa il possesso della ricchezza e la remunerazione realizzata dall'interesse – opportune regole che facciano uso di parametri di natura individuale. La ricerca e l'applicazione di tali regole – per fissare le quali si deve tener conto di fattori esterni sintetizzabili nel "mercato" e che danno la possibilità di decidere per ogni prestazione se essa è dominante su P_0, indifferente con P_0 o dominata da P_0 – è in buona sostanza l'oggetto di tutta la successiva trattazione.

Per conseguire l'obbiettivo conviene procedere in due fasi:

1. la prima fase conduce a determinare nelle zone di non dominanza (ombreggiate in Figure 1.1 e 1.2) le prestazioni $P^* \equiv [X^*, S^*]$ con scadenza diversa da quella di P_0 ed in relazione di indifferenza con essa;
2. la seconda fase porta, in base alla transitività delle preferenze, a determinare le prestazioni vantaggiose e quelle svantaggiose rispetto a P_0 , con scadenza qualsiasi.

Per realizzare la prima fase, può pensarsi ad un sondaggio sull'operatore finanziario in esame per determinare l'importo B datato (o pagabile) in Y che egli valuta in relazione di indifferenza con l'importo A datato (o pagabile) in X. Scriveremo allora per tale operatore

$$(X, A) \approx (Y, B) \tag{1.1}$$

Fissata la prestazione (X, A), .al variare di Y la curva costituita dai punti che individuano le prestazioni (Y, B) ad essa indifferenti, ossia soddisfacenti (1.1), dicesi *linea di indifferenza individuata dal punto* $[X, A]$.

Da un punto di vista operativo, se due punti $P' \equiv [X, A]$ e $P'' \equiv [Y, B]$ sono situati su una medesima linea di indifferenza, le corrispondenti prestazioni (X,A) e (Y,B) sono scambiabili alla pari.

Se vale la (1.1) in base ai criteri c e d, gli importi A e B sono concordi di segno e $|B| - |A|$ è concorde con $Y - X$. La determinazione degli importi indifferenti può procedere al modo seguente, per effetto dei precedenti risultati illustrati per via geometrica (cfr. Figura 1.1 e Figura 1.2).

Indicando con $P_0 \equiv [X_0, S_0]$ il punto rappresentativo della prestazione della quale si cercano quelle indifferenti,

• se $S_0 > 0$ (cfr. Figura 1.3), posto $X = X_0$, $Y = X_1 > X_0$, lo spostamento a destra da P_0 ad $A_1 \equiv [X_1, S_0]$ è svantaggioso per il ritardo dell'incasso; per rimuovere tale svantaggio l'importo della prestazione va aumentato. Il sondaggio su variazioni continue in aumento porta a determinare l'importo $S_1 > S_0$ che realizza la compensazione, onde P_0 e $P_1 \equiv [X_1, S_1]$, ottenuto da A_1 spostandosi in alto, rappresentano prestazioni indifferenti (o, in breve, P_1 e P_0 sono punti indifferenti). Invece se $Y = X_3 < X_0$, lo spostamento a sinistra da P_0 ad $A_3 \equiv [X_3, S_0]$ è vantaggioso per l'anticipo dell'incasso, onde per avere indifferenza occorre diminuire l'incasso da S_0 a S_3 ottenendo mediante sondaggio con spostamento in basso il punto indifferente $P_3 \equiv [X_3, S_3]$ con $S_3 < S_0$;

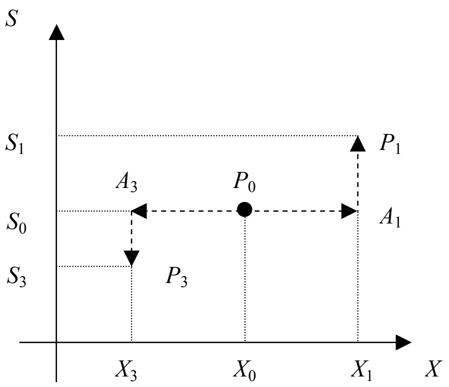

Figura 1.3.

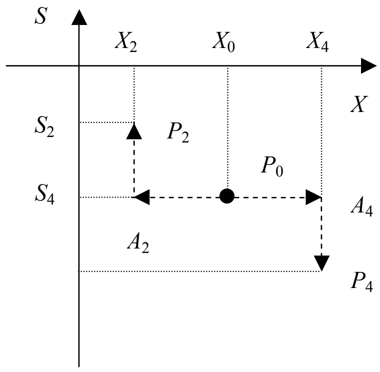

Figura 1.4.

• se $S_0 < 0$ (cfr. Figura 1.4), dato che il ritardo dell'esborso è vantaggioso e l'anticipo è svantaggioso, procedendo in modo analogo a partire da punti $A_2 \equiv [X_2, S_0]$ e $A_4 \equiv [X_4, S_0]$, mediante sondaggio si ottengono i punti (indifferenti a P_0) $P_2 \equiv [X_2, S_2]$, con $X_2 < X_0$, $S_2 > S_0$, mediante uno spostamento a sinistra e poi in alto, o $P_4 \equiv [X_4, S_4]$, con $X_4 > X_0$, $S_4 < S_0$, mediante uno spostamento a destra e poi in basso.

Facendo diminuire o aumentare con continuità le ascisse X_i (i = 1,3) si ottiene, se $S_0 > 0$, una linea con ordinate crescenti nel piano OXS, costituita da P_0 e dai punti del tipo P_1 e P_3 , tutti ad esso indifferenti. Se $S_0 < 0$, la linea costituita da P_0 e dai punti del tipo P_4 e P_2 , tutti ad esso indifferenti, ottenuti variando con continuità $X_i(i = 2, 4)$, ha ordinate decrescenti[6]. Fissato comunque P_0, per la definizione data tali linee sono linee di indifferenza individuate da P_0.

Possiamo ora concretizzare in termini generali l'interesse definito nel § 1.1, limitandoci al caso di importi positivi. Se vale la (1.1) con $X < Y$, lo scambio fra le prestazioni indifferenti implica che la cessione della disponibilità dell'importo A da X a Y è congruamente compensata dal pagamento dell'importo

$$I = B - A \geq 0 \tag{1.2}$$

Diremo allora che A è il *capitale* impiegato, I è l'*interesse* e B il *montante*, in un'operazione di *prestito* o di *impiego*.

Se vale la (1.1) con $X > Y$, l'anticipazione dell'incasso di A da X a Y trova congruo compenso nel pagamento in Y dell'importo

$$D = A - B \geq 0 \tag{1.3}$$

[6] Se si rimuove il criterio *d*, risultano indifferenti le prestazioni con medesimo importo e date diverse e allora le linee di indifferenza hanno ordinate costanti. Rientrano in questo caso i prestiti a titolo gratuito.

Diremo allora che A è il *capitale a scadenza*, D è lo *sconto* e B il *valore attuale* o *valore scontato* o *valore anticipato*, in un'operazione di *sconto* o di *anticipazione*.

La seconda fase si applica in modo banale. A questo proposito basta aggiungere che, con riferimento alla (1.1) nel caso $A > 0$, se un generico $P \equiv [Y, B]$ è indifferente ad un prefissato $P_0 \equiv [X, A]$ allora sono preferiti a P_0 tutti i $P' \equiv [Y, B']$ dove $B' > B$, mentre P_0 è preferito a tutti i $P'' \equiv [Y, B'']$ dove $B'' < B$. Ciò consente di concludere che, costruita la linea di indifferenza passante per P_0, sono preferite alla prestazione (X, A) tutte le prestazioni del tipo (Y, B') mentre il contrario avviene per tutte le prestazioni del tipo (Y, B'').

1.2.2. *Aspetti oggettivi delle leggi finanziarie. Il principio di equivalenza*

Le precedenti considerazioni consentono di dare una prima formulazione empirica del fondamentale "*principio di equivalenza finanziaria*", secondo cui *è equivalente*[7] *incassare (pagare) una somma oggi oppure incassarla (pagarla) in un momento successivo purché ci sia l'incasso (il pagamento) aggiuntivo degli interessi per tale differimento.*

Nel Capitolo 2 le linee di indifferenza e il principio di equivalenza finanziaria saranno formalizzati in termini oggettivi, definendo fattori finanziari, tassi ed intensità per operazioni di prestito e di sconto, in relazione alle possibili distribuzioni del pagamento degli interessi entro il periodo di differimento. Il principio di equivalenza potrà quindi acquisire una valenza oggettiva, assumendosi l'ipotesi che i diversi operatori di un contratto finanziario concordino nel fissare una regola di determinazione dell'importo equivalente B, in funzione dell'importo A e delle epoche X, Y valida per essi.

1.3. *L'aspetto dimensionale delle grandezze finanziarie*

Come nelle scienze fisiche, così, ancorché più limitatamente, nella matematica finanziaria, a completamento delle misure numeriche è necessario introdurre l'*aspetto dimensionale,* distinguendo fra *grandezze fondamentali* e *grandezze derivate.*

Per descrivere le leggi della meccanica, la più antica delle scienze fisiche, si introducono le seguenti grandezze *fondamentali*: la "lunghezza" l, il "tempo" t, la "massa" m, con le loro unità di misura (metro, secondo, chilogrammo-massa) e si dedu-

---

[7] Nell'uso si sostituisce spesso "indifferente" con "equivalente" nel suo significato pratico, purchè ciò non faccia pensare che *P' equivalente a P''* significhi che tali prestazioni appartengano ad una medesima classe di equivalenza nel rigoroso significato insiemistico. Perché ciò avvenga, occorrono ulteriori condizioni su cui torneremo.

cono le *grandezze derivate,* come il “volume” = l^3, la “velocità” = l/t, l’“accelerazione” = l/t^2, la “forza” = ml/t^2 ecc. le cui unità di misura sono derivate da quelle delle grandezze fondamentali. Si parla appunto di *dimensioni* fisiche delle diverse quantità, le quali sono completamente definite quando ne è indicata la dimensione ed il numero che esprime la misura della grandezza nell’unità di misura corrispondente.

Anche nella matematica finanziaria distinguiamo fra *grandezze fondamentali* e *grandezze derivate.* Le fondamentali sono:

1. l’*importo* monetario (m), per misurare l’entità delle transazioni finanziarie in un’opportuna unità (ad es., il dollaro, l’euro, ecc.);
2. il *tempo* (t), per misurare le durate delle operazioni ed i differimenti delle loro scadenze in un’opportuna unità (ad es. l’anno).

Le grandezze derivate, riferite a quelle fondamentali in base alle dimensioni, sono quindi:

1. il *flusso*, definito come un importo diviso per un tempo (quindi con dimensione m^1t^{-1});
2. il *tasso,* definito come un importo diviso un importo (quindi “numero puro”, con dimensione m^0t^0);
3. l’*intensità,* definita come un importo diviso per il prodotto di un importo per un tempo (quindi con dimensione m^0t^{-1}).

Per maggior chiarimento:

– il *flusso* rapporta gli importi monetari all’intervallo temporale in cui essi si producono; tipico flusso è il reddito monetario (ad es.: salari, canoni, ecc.) espresso dall’importo monetario che matura nell’unità di tempo per cause inerenti alla natura dell’operazione in oggetto;
– il *tasso* rapporta due importi fra loro collegati e quindi è un “numero puro” adimensionale; ad es., è un tasso il rapporto fra interesse maturato e capitale impiegato;
– l’*intensità*, ottenuta rapportando un tasso ad un tempo ovvero un flusso ad un importo, tiene conto del tempo occorrente per la formazione di un importo conseguente ad un altro importo, ad es. rapportando l’interesse al capitale impiegato ed al tempo di impiego.

È espressiva la seguente *tabella dimensionale*

importo (m^1t^0)	flusso (m^1t^{-1})
tasso (m^0t^0)	intensità (m^0t^{-1})

in cui si passa all’elemento di destra dividendo per un tempo e si passa all’elemento sottostante dividendo per un importo.

Capitolo 2

Teoria delle leggi finanziarie

2.1. *Relazioni di indifferenza e leggi di scambio per operazioni finanziarie semplici*

Riprendiamo la relazione d'indifferenza, indicata con $\approx$ in (1.1), la quale dipende dal giudizio di un operatore economico che determina prestazioni fra loro indifferenti con i procedimenti indicati in 1.2.

In un'*operazione di prestito* dell'importo S all'epoca T l'operatore economico può calcolare il valore S' di restituzione in $T' > T$ in modo che per lui risulti $(T', S') \approx (T, S)$. Pertanto tale $S' \geq S$ è determinato in base ad una funzione (soggettiva) di S, T, T' e scriveremo

$$S' = f_c\,(S, T; T') \tag{2.1}$$

dove f_c è la *funzione di capitalizzazione* (in quanto S' comprende la restituzione di S e l'aggiunta dell'eventuale interesse mediante la sua incorporazione nel capitale) che realizza l'indifferenza.

In un'*operazione di sconto* all'epoca $T'' < T'$ dell'importo S' con scadenza T', sia $S'' \leq S'$ il valore scontato tale che per l'operatore risulti $(T'', S'') \approx (T', S')$. Si ha quindi

$$S'' = f_a\,(S', T'; T'') \tag{2.2}$$

dove f_a è la *funzione di attualizzazione* (in quanto S' viene attualizzato all'istante T'' con una eventuale riduzione giustificata dall'anticipazione della disponibilità) che realizza l'indifferenza.

È evidente che se due operatori, parti di un contratto di prestito o di sconto, vogliono effettuare entrambi un contratto vantaggioso in relazione alle proprie scale di preferenza, non sempre tale obbiettivo è realizzabile.

Al riguardo può verificarsi che, in un'operazione di prestito in T' del capitale S', indicando con S''_a il montante indifferente (= min accettabile) per il *lender* da incassare in T'' e con S''_b il montante indifferente (= max accettabile) per il *borrower* da sborsare in T'', allora se $S''_b < S''_a$ il contratto non viene stipulato. Analogamente si prova che, in un'operazione di sconto del capitale S' a scadenza T', indicando con S''_a il valore attuale indifferente (= max accettabile) per il *lender* da sborsare in $T'' < T'$ e con S''_b il valore attuale indifferente (= min accettabile) per il *borrower* da incassare in $T'' < T'$, allora se $S''_a < S''_b$ il contratto non viene stipulato.

Esempio 2.1.

Supponiamo che Tizio, prestando l'importo S' all'epoca T' per il periodo (T', T'') voglia incassare in T'' almeno $1{,}09 \cdot S'$. Nel contempo Caio, ricevendo in prestito S' per lo stesso intervallo di tempo, voglia sborsare in T'' non più di $1{,}07 \cdot S'$. È evidente che con tali premesse Tizio e Caio non possono concludere un contratto di prestito. Invero:

– con $S'' < 1{,}07 \cdot S'$, Tizio preferisce non effettuare il prestito;

– con $1{,}07 \cdot S' < S'' < 1{,}09 \cdot S'$, Tizio preferisce non effettuare il prestito e Caio preferisce non ricevere il prestito;

– con $S'' > 1{,}09 \cdot S'$, Caio preferisce non ricevere il prestito.

Supponiamo altresì che Sempronio voglia scontare cambiali portate da Mevio con importo S' per il tempo da T' a $T'' < T'$ offrendo un valore scontato non superiore a $0{,}92 \cdot S'$, mentre Mevio voglia effettuare tale sconto accettando un netto ricavo non inferiore a $0{,}94 \cdot S'$. È chiaro che il contratto non può realizzarsi, giacché qualsiasi valore scontato è considerato svantaggioso da almeno una delle parti.

Rinviando alla teoria economica dei prezzi di mercato per ulteriori considerazioni in merito, proseguiamo l'indagine in una *logica oggettiva* supponendo da parte degli operatori in un dato mercato finanziario un giudizio concorde di equità dello scambio fra due prestazioni (T, S) e (T', S') in un prestito, se le loro grandezze fondamentali soddisfano (2.1). Ed analogamente per uno sconto, che è una forma di prestito, se è soddisfatta la (2.2). Parleremo allora di *contratto equo* se nello scambio è soddisfatta la (2.1) o la (2.2), e *favorevole* (o *sfavorevole*) per una delle parti in caso contrario.

I contratti di scambio fra due prestazioni (T', S') e (T'', S'') danno luogo ad *operazioni finanziarie semplici.* In esse, come già accennato nel Capitolo 1:

– se $T'' > T'$ (= *prestito* o *impiego*), le parti giudicano equo l'interesse $S'' - S'$ come corrispettivo per il prestito di S' da T' a T'', pagato posticipatamente in T''; allora S'' dicesi *montante* alla data T'' dell'importo S' prestato in T';

– se $T'' < T'$ (= *sconto* o *anticipazione*), le parti giudicano equo l'interesse $S' - S''$ per lo sconto di S' da T' a T'', pagato anticipatamente in T''; allora S'' dicesi *valore scontato* alla data T'' dell'importo S' a scadenza in T'[1].

La relazione di indifferenza assume allora una valenza collettiva. La funzione f_c definita in (2.1) costituisce una *legge di capitalizzazione* (o *legge di interesse)* mentre la funzione f_a definita in (2.2) costituisce una *legge di attualizzazione* (o *legge di sconto*). Facendo riferimento d'ora innanzi al caso normale di interessi positivi e fissando S e T in (2.1), il valore S' è una funzione crescente di T'; fissando S' e T' in (2.2), anche il valore S'' è una funzione crescente di T'', in quanto decresce al decrescere di T''.

Applicando prima (2.1) e poi (2.2) con $T'' = T$, si ottiene il valore attuale in T del montante in T' di S impiegato in $T \leq T'$, dato da

$$S^* = f_a[\{f_c(S, T; T')\}, T'; T] \tag{2.3}$$

Se $\forall(S, T; T')$ risulta $S^* = S$, allora f_a neutralizza l'effetto di f_c, comportandosi come funzione inversa, e le conseguenti operazioni di impiego o di anticipazione si dicono *corrispondenti;* in tal caso le leggi espresse da f_c e f_a si dicono *coniugate*.

Unificando la trattazione dei casi $T \leq T'$ e $T > T'$, possiamo parlare di una *legge di scambio* espressa da una funzione f che determina l'importo S' pagabile in T' e scambiabile[2] con S pagabile in T. Risulta dunque

$$S' = f(S, T; T') \tag{2.4}$$

onde se $T \leq T'$ si ha $f = f_c$ mentre se $T > T'$ si ha $f = f_a$.

Soffermiamoci su alcune proprietà assumibili dalla relazione d'indifferenza $\approx$.

1. *proprietà riflessiva*

Se $\forall(T, S)$ risulta $(T, S) \approx (T, S)$, diremo che $\approx$ soddisfa la proprietà riflessiva[3].

2. *proprietà simmetrica*

Se $\forall(S, T, T')$ da $(T, S) \approx (T', S')$ consegue $(T', S') \approx (T, S)$, diremo che $\approx$ soddisfa la proprietà simmetrica[4].

---

[1] Le operazioni di prestito e di sconto coincidono nella sostanza giacché consistono entrambe nello scambio fra una somma minore a scadenza anteriore ed una somma maggiore a scadenza posteriore. La differenza puramente esteriore è che nel primo caso si prefissa la somma minore ed anteriore, nel secondo caso la somma maggiore e posteriore.

[2] Evitiamo qui il termine "equivalente", ancorché usato nella pratica, per riservarlo ai casi, trattati successivamente, in cui $\approx$ realizza una relazione di equivalenza (cfr. nota 7 del Capitolo 1).

[3] Ricordiamo che una relazione binaria R fra elementi a, b, ... di un insieme H soddisfa la proprietà riflessiva se risulta: $a \, \mathrm{R} \, a$, $\forall \, a \in \mathrm{H}$.

[4] Ricordiamo che una relazione binaria R fra elementi a, b, ... di un insieme H soddisfa la proprietà simmetrica se risulta: $a \, \mathrm{R} \, b \rightarrow b \, \mathrm{R} \, a$, $\forall \, a, b \in \mathrm{H}$.

3. *proprietà di proporzionalità degli importi*

Se $\forall(S, T; T')$ e $\forall k > 0$, da $(T, S) \approx (T', S')$ consegue $(T, kS) \approx (T', kS')$, diremo che $\approx$ soddisfa la proprietà di proporzionalità degli importi.

In conseguenza del criterio *c,* se $T' = T$ l'importo in T' scambiabile con S in T coincide con S. Pertanto nell'insieme P delle prestazioni finanziarie la relazione $\approx$ soddisfa sempre la proprietà riflessiva. Possiamo allora definire per ogni terna di variabili la *legge di scambio*

$$f(S,T;T') = \begin{cases} f_c(S,T;T') & , \quad \text{se } T < T' \\ S & , \quad \text{se } T = T' \\ f_a(S,T,T') & , \quad \text{se } T > T' \end{cases} \tag{2.5}$$

Se nell'insieme P considerato vale la proprietà simmetrica, risulta

$$S = f_a[\{f_c(S, T, T')\}, T', T],\ \forall\ (S, T, T'),\ T < T' \qquad (2.6)^5$$

In tal caso, ricordando (2.3) le leggi f_c e f_a sono fra loro coniugate e per (2.4) la (2.5) può scriversi nella forma

$$S = f[\{f(S, T, T')\}, T', T],\ \forall\ (S, T, T') \qquad (2.6')$$

che rimane valida con la medesima f se si sostituiscono valori con apice a valori senza apice e viceversa [6].

Se nell'insieme P considerato vale la proprietà di proporzionalità degli importi, la f definita in (2.4) è *omogenea lineare* rispetto all'importo [7].

---

[5] Se si ponesse $T > T'$, occorrerebbe scambiare f_c e f_a nella (2.6).

[6] Il caso di simmetria – lungi dall'essere realistico nei rapporti fra imprese private e banche, a causa delle diverse modalità ed onerosità del mercato dei finanziamenti mediante anticipazioni (che comporta costi finanziari per l'impresa) rispetto a quello degli investimenti mediante depositi, prestiti, ecc. (che dà luogo a ricavi finanziari per l'impresa) – trova applicazioni nei rapporti fra persone o imprese collegate e da un punto di vista teorico consente di trattare in modo parallelo i due sistemi di leggi.

[7] La proporzionalità degli importi è usualmente adottata negli schemi teorici ma andrebbe limitata entro scaglioni di importo non troppo ampi. I proventi finanziari per unità di capitale impiegato variano di fatto in relazione all'entità di quest'ultimo ed alla conseguente forza contrattuale di chi investe.

2.2. *Leggi a due variabili e fattori di scambio*

Proseguiamo l'analisi delle leggi di scambio supponendo sempre valide per $\approx$ la *proprietà riflessiva* e quella di *proporzionalità degli importi.* Per effetto di quest'ultima si può allora trasformare la (2.1) nella particolare forma moltiplicativa

$$S' = S \cdot m(T, T') \ , \ T \leq T' \tag{2.1$'$}$$

dove $m(T, T')$ dicesi *fattore di montante* ed esprime la *legge di capitalizzazione* in funzione soltanto delle due variabili temporali; analogamente si può trasformare la (2.2) nella forma

$$S'' = S' \cdot a(T', T''), \ T' \geq T'' \tag{2.2$'$}$$

dove $a(T', T'')$ dicesi *fattore di sconto* ed esprime la *legge di sconto* in funzione soltanto delle due variabili temporali. Si parla perciò di *leggi a due variabili.*

La *proprietà riflessiva* per $\approx$ equivale ora a

$$m(T, T) = a(T, T) = 1, \ \forall \ T \tag{2.7}$$

Inoltre se e soltanto se da (2.1$'$) e (2.2$'$) ponendo $T'' = T$ segue $S'' = S$, ossia vale per $\approx$ la proprietà simmetrica, le leggi $m(\cdot)$ e $a(\cdot)$ soddisfano

$$m\ (T, T') \cdot a\ (T', T) = 1, \ \forall \ T \leq T' \tag{2.8}$$

La (2.8) mostra che, nell'ambito delle leggi a due variabili, *leggi coniugate per lo stesso arco temporale danno luogo a fattori fra loro reciproci.*

Particolarizzando la (2.4), consideriamo la *legge di scambio a due variabili* individuata dal *fattore di scambio* $z(X, Y)$, numero puro definito, particolarizzando (2.5), mediante:

$$z(X,Y) = \begin{cases} m(X,Y), & \text{se } X < Y \\ \quad 1 \quad , & \text{se } X = Y \\ \mathrm{a}(X,Y), & \text{se } X > Y \end{cases} \tag{2.5$'$}$$

In sintesi, avendo assegnato una relazione d'indifferenza $\approx$, la corrispondente legge di scambio è espressa dal fattore $z(X, Y)$, tale che $(X, S_1) \approx (Y, S_2)$ equivale a $S_2 = S_1 z(X, Y)$. Il fattore di scambio $z(X, Y)$ è una funzione definita per ogni coppia (X, Y) di epoche di riferimento dello scambio, la quale "trasporta" i valori da X a Y, in avanti (= capitalizzazione) se $X < Y$, all'indietro (= attualizzazione) se $X > Y$.

Supporremo d'ora innanzi

$$z(X, Y) > 0, \ \forall (X, Y) \tag{2.5$''$}$$

(limitando, se occorre, l'insieme di definizione della funzione z alla parte dove tale condizione sia analiticamente soddisfatta), affinché non avvenga mai che un incasso (esborso) risulti indifferente ad un esborso (incasso) per effetto di una variazione della scadenza.

In termini geometrici, consideriamo sul piano cartesiano OXY i punti $G \equiv (X, Y)$ col significato sopra precisato[8]. Il fattore di scambio è allora la funzione di punto $z(G)$. Tenuta presente la (2.5′), risulta $z(G) = 1$ se G appartiene alla bisettrice degli assi coordinati. Inoltre se G è *sopra* la bisettrice (ossia se $X < Y$), risulta $z(G) = m(X, Y) > 1$, mentre se G è *sotto* la bisettrice (ossia se $X > Y$), risulta $z(G) = a(X, Y) < 1$ e quindi, per (2.5″): $0 < a(X, Y) < 1$[9].

Ricollegandoci alle considerazioni svolte nel Capitolo 1 (in particolare al criterio d per importi positivi, in quanto $z(X, Y)$ è il valore di scambio dell'importo unitario), in ipotesi di rendimento del denaro le curve di livello $z(X, Y) =$ cost. sono grafici di funzioni $Y = \psi(X)$ strettamente crescenti[10].

Se la relazione $\approx$ espressa da $z(X, Y)$ soddisfa la *proprietà simmetrica,* particolarizzando (2.6′) ne segue la condizione

$$z(X, Y) \cdot z(Y, X) = 1;\ \forall\ (X, Y) \tag{2.9}$$

Se $z(X, Y)$ soddisfa la (2.9), essa definisce una coppia di leggi finanziarie di interesse e di sconto a due variabili fra loro coniugate.

È evidente che, se la relazione di indifferenza è simmetrica, basta definire $z(X, Y)$ in uno dei due semipiani per avere anche i valori z nell'altro semipiano mediante la seguente regola: *i valori z in punti fra loro simmetrici rispetto alla bisettrice sono tra loro reciproci.* In tal caso, essendo $z(X, Y) = 1/z(Y, X)$, $\forall(X, Y)$, le coppie di curve di livello dei fattori di montante $z = k > 1$ e di sconto $z = 1/k < 1$ sono coppie di grafici di funzioni fra loro inverse.

---

[8] Si osservi che le funzioni $m(X,Y)$ e $a(X,Y)$ sono definite rispettivamente nel semipiani disgiunti $X < Y$ e $X > Y$, ossia sopra e sotto la bisettrice degli assi coordinati. Ma è comodo estendere la loro definizione sulla bisettrice $Y = X$, ricordando la (2.7) e ponendo $m(X, X) = a(X, X) = 1$.

[9] La (2.5′) conduce ad una formulazione generale dei valori di scambio a due variabili che non implica la simmetria della relazione finanziaria. Ne consegue che la legge espressa da $z(X, Y)$ si presta a schematizzare, oltre che la variabilità dei parametri di costo e di ricavo finanziario nel tempo, anche la loro diversità nelle operazioni di impiego e di sconto che interessano l'impresa. Ad esempio, se un'azienda si procura liquidità mediante anticipazioni su crediti futuri e la impiega in operazioni finanziarie, si crea un margine non nullo se non sono reciproci i fattori a ed m assunti in tali operazioni e riuniti in z.

[10] La crescenza di $\psi(X)$ consegue dalle considerazioni esposte riguardo al comportamento economico. Ma si può fornire una dimostrazione analitica nel seguente caso particolare. Invero, se supponiamo $z(X, Y)$ ovunque continua e parzialmente derivabile, risulta: $\frac{\partial z}{\partial X} < 0$, $\frac{\partial z}{\partial Y} > 0\ \forall\ (X, Y)$. Pertanto le curve di livello $z(X, Y) =$ cost. sono continue e strettamente crescenti, quindi sono grafici di funzioni $Y = \psi(X)$ invertibili. Infatti per un teorema sulle funzioni implicite, risulta: $\psi'(X) = -\frac{\partial z}{\partial X} / \frac{\partial z}{\partial Y}$, onde nelle predette ipotesi $\psi(X)$ è continua e $\psi'(X) > 0$.

2.3. *Grandezze derivate nelle leggi di capitalizzazione e di attualizzazione*

Con riferimento alle leggi definite in (2.1′) e (2.2′), deduciamo le seguenti grandezze derivate [11].

2.3.1. *Capitalizzazione*

In funzione del *fattore di montante* (o *di capitalizzazione*) *iniziale*

$$f.m.i. := m(X, Y) \tag{2.10}$$

(: = significa "uguale per definizione") – che misura moltiplicativamente l'accrescimento da X a $Y > X$ del capitale investito in X; "iniziale" perché la data X di impiego coincide con l'inizio dell'arco temporale (X, Y) su cui si misura tale accrescimento – possiamo altresì definire (cfr. Figura 2.1):

– il *tasso di interesse (periodale) iniziale* (= interesse per unità di capitale impiegato sull'arco temporale da X a $Y > X$), espresso da

$$t.i.i. := m(X, Y) - 1 \tag{2.11}$$

– l'*intensità d'interesse (periodale) iniziale,* espressa da

$$i.i.i. := \{m(X, Y) - 1\}/(Y - X) = \{m(X, X + t) - 1\}/t \tag{2.12}$$

avendo posto: $t = Y - X > 0$.

Se invece, ferma restando in X l'epoca di impiego, con la posizione $X < Y < Z$ l'accrescimento del capitale si misura su un arco temporale (Y, Z) *successivo* ad X, quindi *in proseguimento* rispetto all'intervallo (X, Y) senza disinvestimento in Y, possiamo allora generalizzare definendo fattori e tassi ed intensità di proseguimento, al modo seguente:

– il *fattore di montante di proseguimento* da Y a Z (= montante in $Z=Y + u$, $u > 0$, del montante unitario in $Y = X + t$, $t > 0$, per un impiego iniziato in X), espresso da:

$$f.m.p. := r(X; Y, Z) = m(X, Z)/m(X, Y) = m(X, Y + u)/m(X, Y) \tag{2.13}$$

– il *tasso di interesse (periodale) di proseguimento* da Y a Z (= interesse per unità di montante in Y nel trasporto da Y a $Z = Y + u$, $u > 0$, per un impiego iniziato in X), espresso da:

[11] Per chiarezza espositiva, denoteremo nel prosieguo con lettere latine maiuscole le variabili temporali che hanno il significato di *epoca o istante* e con lettere latine minuscole quelle che indicano *durate.*

$$t.i.p. := f.m.p. - 1 = \{m(X, Z) - m(X, Y)\}/m(X, Y) =$$
$$= \{m(X, X + u) - m(X, Y)\}/m\,(X, Y) \qquad (2.14)$$

– l'*intensità d'interesse (periodale) di proseguimento* da Y a $Z = Y + u$, $u > 0$, espressa da:

$$i.i.p. := \frac{r(X;Y,Z)-1}{Z-Y} = \frac{m(X,Z)-m(X,Y)}{(Z-Y)\,m(X,Y)} = \frac{m(X,Y+u)-m(X,Y)}{u\;m(X,Y)} \qquad (2.15)$$

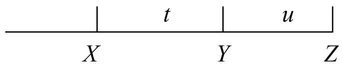

Figura 2.1.

La (2.13) si giustifica osservando che, se si investe l'importo K alla data X, il montante maturato in Y vale $K_Y = Km(X, Y)$ mentre quello maturato in Z vale $K_Z = Km(X, Z)$. Per definizione $r(X; Y, Z)$ soddisfa: $K_Z = K_Y\, r(X; Y, Z)$. Per confronto risulta quindi

$$r(X; Y, Z) = K_Z / K_Y = m(X, Z)/m(X, Y)$$

È ovvio che, se $X = Y$, le (2.13), (2.14), (2.15) si riducono rispettivamente a (2.10), (2.11), (2.12), ossia le grandezze "di proseguimento" si particolarizzano in quelle "iniziali". In simboli: $r(Y; Y, Z) = m(Y, Z)$.

L'intensità (2.15) si ottiene dividendo per $m(X, Y)$ il rapporto incrementale parziale rispetto a η da Y a $Y + u$ della funzione $m(\xi, \eta)$ con $\xi = X$. Nell'ipotesi che $m(\xi, \eta)$ sia derivabile parzialmente rispetto a η con derivata continua nell'intervallo che interessa, esiste allora finito il limite destro di (2.15) quando $u \to 0$, il quale rappresenta *l'intensità istantanea di interesse*[12] (sottintendendo: *di proseguimento*) in Y per un impiego iniziato in X, denotata con $\delta(X, Y)$. In simboli, indicando con ln il $\log_e$:

$$\delta(X, Y) = \lim_{u \to 0} \frac{m(X,Y+u)-m(X,Y)}{u\;m(X,Y)} =$$

$$= \left\{\frac{\partial}{\partial\eta} m(X,\eta)\right\}_{\eta=Y} / \, m(X,Y) = \left\{\frac{\partial}{\partial\eta} \ln m(X,\eta)\right\}_{\eta=Y} \qquad (2.16)$$

[12] È anche usata la locuzione di *forza d'interesse* o anche (ma impropriamente dal punto di vista dimensionale) di *tasso istantaneo d'interesse.*

Operando sulle variabili ξ, η con $\xi < \eta$, può concludersi che $\delta(\xi, \eta)$ è la *derivata logaritmica* (*parziale* rispetto a η) di $m(\xi, \eta)$.

Invertendo la funzione δ e l'operatore derivata che compaiono in (2.16) si ottiene l'importante espressione per il montante di proseguimento (2.13) in funzione dell'intensità istantanea [13]:

$$\frac{m(X, Y+u)}{m(X,Y)} = e^{\int_Y^{Y+u} \delta(X,\eta)d\eta} \tag{2.16'}$$

2.3.2. *Attualizzazione*

Sia ora X l'epoca finale di un'operazione finanziaria (ad esempio quella di scadenza di un credito). Analogamente a quanto visto per la capitalizzazione, in funzione del *fattore di sconto* (o *di attualizzazione*) *iniziale*

$$f.s.i. := a(X, Y) > 0 \tag{2.17}$$

possiamo altresì definire (cfr. Figura 2.2):

– il *tasso di sconto periodale iniziale* (= sconto per unità di capitale a scadenza nell'anticipazione da X a $Y < X$), dato da:

$$t.s.i. := 1 - a(X, Y) \tag{2.18}$$

ed inoltre, posto: $t = X - Y > 0$:

– l'*intensità di sconto periodale iniziale* espressa da:

$$i.s.i. := \{1 - a(X, Y)\}/(X - Y) = \{1 - a(X, X - t)\}/t \tag{2.19}$$

Le espressioni dinamiche concernenti "sconti di proseguimento" in relazione ad un prolungamento della durata dello sconto sono poco usate, ma hanno significatività nelle attualizzazioni per la decrescenza del valore attuale rispetto alla durata dell'anticipazione. Pertanto introduciamo anche per lo sconto le intensità periodali di proseguimento nonché l'intensità istantanea, in relazione alle epoche $X > Y > Z$. Indicando con $u > 0$ la durata di ulteriore sconto e $Z = Y - u$, si definisce allora:

– il *fattore di sconto di proseguimento da Y a Z* (= valore attuale in $Z < Y$ del valore attuale unitario in $Y < X$ di un capitale a scadenza in X, quindi di importo $1/a(X, Y)$), espresso da:

$$f.s.p. := a(X, Z)/a(X, Y) = a(X, Y - u)/a(X, Y) \tag{2.20}$$

---

[13] Da (2.16) consegue che, se u è piccolo, $m(X, Y) \cdot \delta(X, Y)\Delta u$ approssima linearmente $\Delta m = m(X, Y + u) - m(X, Y)$. Inoltre dall'ipotesi di fruttuosità del capitale investito, che comporta $m(X, X + t) > 1$ e crescente con t, segue, per (2.17) e per una nota proprietà degli integrali, la positività di $\delta(X, \eta)$, $\forall \eta > X$. E vale il viceversa. Una analoga conclusione si ottiene per l'intensità istantanea di sconto, introdotta più sotto.

– il *tasso di sconto di proseguimento da Y a Z* (= sconto per l'anticipazione da Y a Z del valore attuale unitario in $Y < X$ di un capitale a scadenza in X, quindi di importo $1/a(X, Y)$), espresso da:

$$t.s.p. := 1 - f.s.p. = \frac{a(X,Y) - a(X,Z)}{a(X,Y)} = \frac{a(X,Y) - a(X,Y-u)}{a(X,Y)} \qquad (2.21)$$

– l'*intensità di sconto di proseguimento da Y a Z,* espressa da:

$$i.s.p. := \frac{1 - f.s.p.}{Y - Z} = \frac{a(X,Y) - a(X,Z)}{(Y-Z)\, a(X,Y)} = \frac{a(X,Y-u) - a(X,Y)}{-u \;\, a(X,Y)} \qquad (2.22)$$

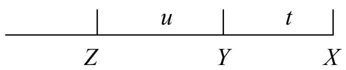

Figura 2.2.

Con passaggi al limite analoghi a quelli che hanno condotto all'intensità istantanea di interesse, si ottiene:

– l'*intensità istantanea di sconto* in Y, denotata con $\theta(X, Y)$ e fornita da:

$$\theta(X, Y) = \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} a(X,\eta) \right\}_{\eta = Y} / \, a(X,Y) = \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} ln \; a(X,\eta) \right\}_{\eta = Y} \qquad (2.23)$$

Essendo $\theta(X, Y)$ la derivata logaritmica (parziale rispetto a $Y \leq X$) di $a(X, Y)$, per inversione si ottiene, $\forall\, Z < Y$,

$$\frac{a(X,Z)}{a(X,Y)} = e^{\int_Y^Z \theta(X,\eta) d\eta} = e^{-\int_Z^Y \theta(X,\eta) d\eta} \qquad (2.24)$$

2.4. *Leggi finanziarie scindibili*

2.4.1. *La proprietà di scindibilità, debole e forte. Relazioni di equivalenza*

Nell'ambito delle leggi finanziarie a due variabili temporali, esaminiamo il significato e le conseguenze della condizione di *scindibilità,* introdotta dal Cantelli.

Si ha scindibilità in un processo di capitalizzazione (o di attualizzazione) allorché investendo (o scontando) un dato capitale disponibile in una data epoca X, si ottiene