



ROSELLA GIACOMETTI - CRISTIAN EPIS

APPUNTI DI MATEMATICA FINANZIARIA

Seconda edizione



G. Giappichelli Editore

APPUNTI DI
MATEMATICA FINANZIARIA

ROSELLA GIACOMETTI - CRISTIAN EPIS

APPUNTI DI MATEMATICA FINANZIARIA

Seconda edizione



G. Giappichelli Editore

© Copyright 2017 - G. GIAPPICHELLI EDITORE - TORINO

VIA PO, 21 - TEL. 011-81.53.111 - FAX 011-81.25.100

<http://www.giappichelli.it>

ISBN/EAN 978-88-921-1128-8

Stampa: LegoDigit s.r.l. - Lavis (TN)

Le fotocopie per uso personale del lettore possono essere effettuate nei limiti del 15% di ciascun volume/fascicolo di periodico dietro pagamento alla SIAE del compenso previsto dall'art. 68, commi 4 e 5, della legge 22 aprile 1941, n. 633.

Le fotocopie effettuate per finalità di carattere professionale, economico o commerciale o comunque per uso diverso da quello personale possono essere effettuate a seguito di specifica autorizzazione rilasciata da CLEARedi, Centro Licenze e Autorizzazioni per le Riproduzioni Editoriali, Corso di Porta Romana 108, 20122 Milano, e-mail autorizzazioni@clearedi.org e sito web www.clearedi.org.

A Virginia, Rosario e Alberto

Rosella

A Emilia, Olimpio, Oscar, Stefania e Andrea Viola

Cristian



Indice

	<i>pag.</i>
Prefazione	XIII
Capitolo 1	
NOZIONI ELEMENTARI	
1.1. La matematica finanziaria	1
1.2. Situazione Finanziaria Elementare (SFE) e Operazioni Finanziarie	1
1.3. Capitalizzazione e attualizzazione	4
1.3.1. Operazioni di capitalizzazione (o investimento)	5
1.3.2. Operazioni di attualizzazione (o di sconto – o di anticipazione)	7
1.4. Relazioni tra le grandezze finanziarie fondamentali	8
1.5. Leggi finanziarie di capitalizzazione	10
1.6. Leggi finanziarie di attualizzazione	14
1.7. Tasso di interesse e tasso di sconto	15
1.7.1. Intensità di interesse e intensità di sconto	16
1.7.2. Intensità istantanea di interesse e intensità istantanea di sconto	17
Capitolo 2	
REGIMI FINANZIARI	
2.1. Regime di capitalizzazione semplice	19
2.1.1. Regime di capitalizzazione semplice	19
2.1.2. Intensità istantanea di interesse	22
2.1.3. Linearità degli interessi	22
2.1.4. Interruzione di un'operazione di investimento e reinvestimen- to del montante intermedio	23
2.1.5. Capitalizzazione a tassi variabili	24
2.1.6. Sconto razionale	25
2.2. Regime di sconto commerciale	26
2.2.1. Regime di sconto commerciale	26

	<i>pag.</i>
2.2.2. Attualizzazione a tassi variabili	29
2.2.3. Regime ad interesse anticipato	29
2.2.4. Intensità istantanea di interesse	32
2.2.5. Linearità degli sconti	32
2.2.6. Interruzione di un'operazione di capitalizzazione e reinvestimento del montante intermedio	33
2.3. Regime di capitalizzazione composta	33
2.3.1. Regime di capitalizzazione composta	33
2.3.2. Intensità istantanea di interesse	35
2.3.3. Interruzione di un'operazione di capitalizzazione e reinvestimento del montante intermedio	36
2.3.4. Capitalizzazione a tassi variabili	37
2.3.5. Sconto continuo	37
2.4. Capitalizzazione mista	38
2.5. Confronto tra regimi finanziari	40
2.6. Proprietà dei fattori di montante	42
2.6.1. Traslabilità	42
2.6.2. Scindibilità	43

Capitolo 3

TASSI MEDI E TASSI EQUIVALENTI

3.1. Tassi equivalenti nello stesso regime	48
3.1.1. Tassi equivalenti nel regime di interesse semplice	48
3.1.2. Tassi equivalenti nel regime ad interesse anticipato	50
3.1.3. Tassi equivalenti nel regime di interesse composto	51
3.1.4. Relazione tra tassi equivalenti in regimi diversi	52
3.2. Tassi medi	53
3.2.1. Tasso medio nel regime ad interesse semplice	53
3.2.2. Tasso medio nel regime ad interessi anticipati	55
3.2.3. Tasso medio nel regime ad interesse composto	56
3.3. Tassi nominali convertibili m volte l'anno	56

Capitolo 4

VALORE DI UN'OPERAZIONE FINANZIARIA

4.1. Valore di un'operazione finanziaria complessa	64
4.1.1. Il valore attuale di un'operazione finanziaria complessa	67
4.1.2. Montante di un'operazione finanziaria complessa	68
4.2. Operazioni finanziarie eque	69
4.3. La costituzione di un capitale	69

pag.

Capitolo 5**LE RENDITE**

5.1. Definizione e classificazione	71
5.2. Valore di una rendita all'epoca t	72
5.2.1. Valore attuale di una rendita annuale posticipata immediata temporanea di durata n	74
5.2.2. Valore attuale di una rendita annuale posticipata immediata perpetua	76
5.2.3. Valore attuale di una rendita annuale anticipata immediata temporanea di durata n	77
5.2.4. Valore attuale di una rendita annuale anticipata immediata perpetua	78
5.2.5. Valore attuale di una rendita annua posticipata di durata n anni e differita di p anni	79
5.2.6. Valore attuale di una rendita annua anticipata di durata n anni e differita di p anni	81
5.2.7. Valore attuale di una rendita annua posticipata/anticipata immediata di durata n anni con rate variabili in progressione aritmetica di ragione b	82
5.2.8. Valore attuale di una rendita annua posticipata/anticipata immediata di durata n anni con rate variabili in progressione geometrica di ragione q	84
5.2.9. Montante di una rendita annuale posticipata immediata temporanea di durata n	85
5.2.10. Montante di una rendita annuale anticipata immediata temporanea di durata n	87
5.2.11. Montante di una rendita annua posticipata/anticipata immediata di durata n anni con rate variabili in progressione aritmetica di ragione b o geometrica di ragione q	88
5.3. Valore di una rendita in un generico istante t_k	89
5.4. Rendite frazionate	91
5.5. Costituzione di un capitale con versamenti costanti	93

Capitolo 6**AMMORTAMENTI**

6.1. Caratteristiche generali	96
6.2. Ammortamenti a tasso fisso	106
6.2.1. Prestito con rimborso periodico degli interessi posticipati e del capitale a scadenza	106
6.2.2. Ammortamento italiano	107
6.2.3. Ammortamento a rate costanti (francese)	110
6.2.4. Ammortamento americano o a due tassi	113

	<i>pag.</i>
6.3. Ammortamenti a tasso variabile	114
6.3.1. Ammortamento a tasso variabile classico	114
6.3.2. Ammortamento a tasso variabile e rata costante	117
6.4. Valutazione di un prestito	118
6.4.1. Usufrutto e nuda proprietà	120
6.5. Esempi di mutui	122

Capitolo 7

CRITERI DI SCELTA TRA OPERAZIONI FINANZIARIE

7.1. Progetti finanziari: definizioni e classificazioni	127
7.2. Criteri di scelta	129
7.2.1. Il risultato economico attualizzato	132
7.2.2. Il tasso interno di rendimento	137
7.3. T.A.E.G. ed I.S.C.	142

Capitolo 8

MATEMATICA ATTUARIALE

8.1. Cenni di matematica attuariale	147
8.2. Le funzioni biometriche e le tavole <i>di mortalità</i>	148
8.2.1. Probabilità di vita e di morte	150
8.2.2. Vita media residua	152
8.2.3. Vita probabile	154
8.3. Valutazione di alcune assicurative libere sulla vita	154
8.3.1. Assicurazioni libere sulla vita in caso vita	157
8.3.1.1. Assicurazione a capitale differito	157
8.3.1.2. Assicurazione di rendita vitalizia	159
8.3.2. Assicurazioni libere sulla vita in caso morte	164
8.3.2.1. Assicurazione elementare in caso morte	164
8.3.2.2. Assicurazioni in caso morte	165
8.3.3. Assicurazioni miste	167
8.4. Premi periodici	167
8.5. Premi caricati e di tariffa	169
8.6. Riserva matematica	171

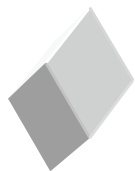
Capitolo 9

LE FUNZIONI FINANZIARIE IN EXCEL

9.1. Valutazione delle rendite	175
9.1.1. Montante di rendite periodiche posticipate a rata costante	176
9.1.2. Calcolo del tasso di interesse di una rendita periodica	179

	<i>pag.</i>
9.1.3. Valore attuale di rendite periodiche posticipate	181
9.1.4. Valore attuale di una rendita generica	183
9.2. Redazione del piano di ammortamento di un debito	185
9.2.1. Ammortamento francese	185
9.2.2. Ammortamento italiano	188
9.2.3. Ammortamento americano	191
9.2.4. Calcolo del numero delle rate	194
9.3. Valutazione dei progetti finanziari	196
9.3.1. Valore attuale netto	196
9.3.2. Tasso interno di rendimento	198
9.3.3. Calcolo di un flusso mancante	201
 <i>Appendice</i>	 205





Prefazione

Due sono le motivazioni che hanno spinto gli autori a scrivere questo testo: da un lato il tentativo di raccogliere l'esigenza degli studenti di assimilare i concetti base della materia attraverso casi pratici, dall'altro la necessità di mettere a loro disposizione strumenti di studio che, in poche pagine, forniscano i principi base della matematica finanziaria e un adeguato numero di esempi.

Gli autori hanno raccolto gli appunti di lezione, da cui il titolo, e hanno selezionato gli argomenti principali sulla base dell'esperienza maturata in diversi anni di didattica nei corsi di Matematica Finanziaria e di insegnamento nelle SSIS. Hanno cercato di prediligere uno stile diretto ed una trattazione degli argomenti che, accanto alle nozioni strettamente teoriche, presentasse un buon numero di esempi e casi pratici mediante i quali, si auspica, gli studenti siano stimolati e facilitati nella comprensione. Proprio per questa ragione in più parti del testo si è sottolineata la stretta relazione tra la matematica finanziaria e le operazioni che interessano quotidianamente la maggior parte degli individui; si pensi all'accensione di un mutuo, alla scelta di un investimento, all'acquisto rateale di un bene di consumo.

Per quanto riguarda la struttura del libro, i capitoli dal primo al settimo sono dedicati alla presentazione delle nozioni basilari della matematica finanziaria in regime di certezza.

Il capitolo otto tratta la valutazione in condizione di incertezza ed i principi base della matematica attuariale. Anche qui il tentativo è di agganciare tematiche più avanzate, probabilistiche, attraverso le quali muovere i primi passi dalle valutazioni in condizioni di certezza ad una concezione più realistica di un mondo in cui la componente aleatoria è dominante. L'obiettivo è stimolare lo studente ad approfondire gli aspetti di taglio finanziario quantitativo e lasciare intuire come, oltre la matematica finanziaria, ci sia la finanza matematica, materia di grande attualità e importanza nell'ambito di

tutte le operazioni sui mercati finanziari e senza la quale è ormai assai arduo comprendere a fondo gli strumenti e gli eventi nel mondo della finanza.

*L'ultimo capitolo, che rappresenta la principale novità di questa seconda edizione del testo, è interamente dedicato all'utilizzo di Excel per la risoluzione dei classici problemi finanziari affrontati nei primi sette capitoli, relativi alla *Matematica Finanziaria Classica*.*

Ringraziamo i colleghi e gli studenti che, nel seguire il corso negli anni passati, hanno fornito uno stimolo importante e argomenti di riflessione per la stesura e la rielaborazione di questo libro.

Un ringraziamento in particolare a Marida Bertocchi per averci supportato nella prima stesura del testo e per molte, moltissime altre ragioni.

GLI AUTORI





Nozioni Elementari

1.1. La matematica finanziaria

La matematica finanziaria è quella branca della matematica che si occupa dello studio dei criteri di valutazione delle operazioni finanziarie, ovvero di tutte quelle operazioni che comportano, in condizione di certezza, uno scambio tra somme di denaro riferite ad istanti temporali differenti.

Sulla base della definizione appena fornita, tre quindi sono gli elementi ritenuti essenziali:

- gli importi di denaro coinvolti nello scambio;
- gli istanti di tempo a cui detti importi si riferiscono;
- la condizione di certezza del pagamento/riscossione dei flussi finanziari.

Quest'ultima condizione, come vedremo nel capitolo finale del libro, rappresenta l'elemento distintivo tra la matematica finanziaria e la matematica attuariale.

1.2. Situazione Finanziaria Elementare (SFE) e Operazioni Finanziarie

Alla base di ogni atto in grado di produrre una variazione di capitale vi sono le situazioni finanziarie elementari (SFE), ritenute le entità più semplici della matematica finanziaria.

Una SFE è una coppia ordinata di valori (t, K) , il primo dei quali rappresenta l'istante di tempo ed il secondo l'importo monetario ad esso relativo. Essa può quindi essere semplicemente definita come la disponibilità di una somma K al tempo t .

Si osservi, infatti, che l'informazione relativa ad un singolo importo non è di per sé utile in quanto non viene specificata l'epoca di esigibilità di tale importo.

Sulla base della definizione data emerge come ciascuna situazione finanziaria elementare possa essere agevolmente rappresentata graficamente o su un piano cartesiano (avente in ascissa i tempi e in ordinata gli importi) o su una retta orientata (l'asse dei tempi).

Per far ciò sarà sufficiente:

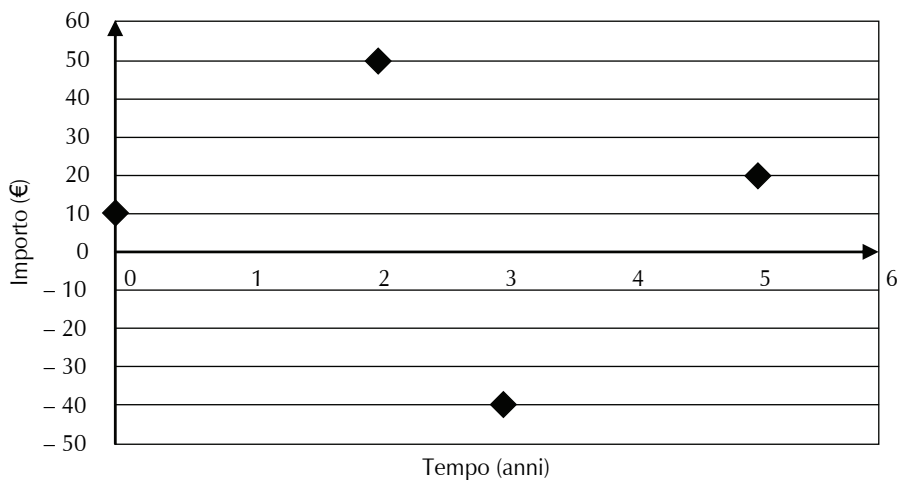
- stabilire un'unità di misura per gli importi;
- stabilire un'unità di misura per i tempi;
- fissare l'istante iniziale in $t_0 = 0$ alla data odierna;
- considerare positive le somme relative ai crediti e negative quelle relative ai debiti.

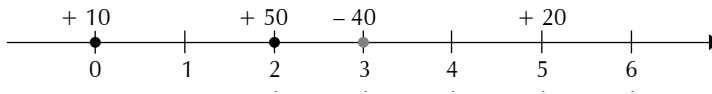
Esempio

Si rappresentino sul piano cartesiano e sull'asse temporale le seguenti situazioni finanziarie elementari in cui i tempi sono espressi in anni e gli importi in euro.

(0; 10) (2; 50) (3; -40) (5; 20)

Rappresentazione sul piano cartesiano



Rappresentazione sull'asse dei tempi

Una volta compreso il significato di situazione finanziaria elementare è necessario soffermarsi sul concetto di equivalenza (o indifferenza) intertemporale tra SFE, che si può ritenere alla base dell'intera matematica finanziaria.

Due situazioni finanziarie elementari si definiscono equivalenti (o indifferenti) intertemporalmente quando si ritiene equo il loro scambio. Ovviamente l'equità a cui si fa riferimento è quella determinata dai mercati finanziari e non dall'etica comportamentale.

La relazione di indifferenza intertemporale tra situazioni finanziarie elementari gode di alcune importanti proprietà:

- la proprietà riflessiva: ogni SFE è indifferente intertemporalmente a se stessa;
- la proprietà simmetrica: date due SFE se la prima è indifferente intertemporalmente alla seconda anche la seconda è indifferente intertemporalmente alla prima;
- la proprietà transitiva: date tre SFE, se la prima è indifferente intertemporalmente alla seconda e la seconda è indifferente intertemporalmente alla terza, allora la prima è indifferente intertemporalmente alla terza.

Essa, pertanto, è una relazione di equivalenza.

Partendo da quanto esposto nel primo paragrafo e sulla base del concetto, appena introdotto, di situazione finanziaria elementare, possiamo definire un'operazione finanziaria come un qualsiasi contratto (o accordo) che dia origine allo scambio equo tra due o più SFE riferite ad epoche diverse.

Si definiscono:

- operazioni finanziarie semplici: quelle che prevedono il coinvolgimento di due sole situazioni finanziarie elementari;
- operazioni finanziarie complesse: quelle che si caratterizzano per un numero di SFE superiore a due.

Di seguito vengono riportati alcuni esempi di operazioni finanziarie:

- acquisto di obbligazioni;
- sconto di una cambiale;
- accensione di un mutuo per l'acquisto della casa;
- acquisto di un'autovettura mediante pagamento rateale;

- leasing;
- prestito al consumo;
- finanziamento mediante cessione del quinto dello stipendio.

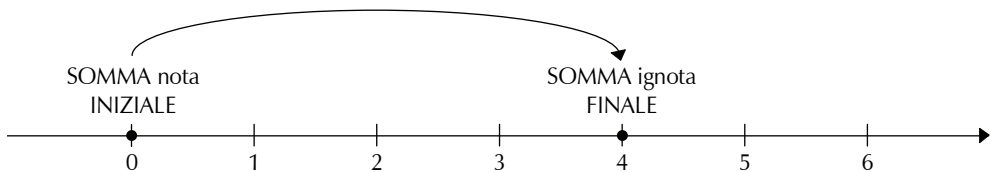
Come si può facilmente constatare scorrendo l'elenco, si tratta di operazioni molto comuni che ciascuno di noi, e non solo chi opera direttamente sui mercati finanziari, può incontrare nella vita di ogni giorno. Ecco perché la loro comprensione potrà essere di grandissima utilità ogniquale volta ci si troverà nelle condizioni di dover valutare il mutuo più economico tra quelli proposti o il tipo di investimento più conveniente tra quelli presenti sul mercato.

1.3. Capitalizzazione e attualizzazione

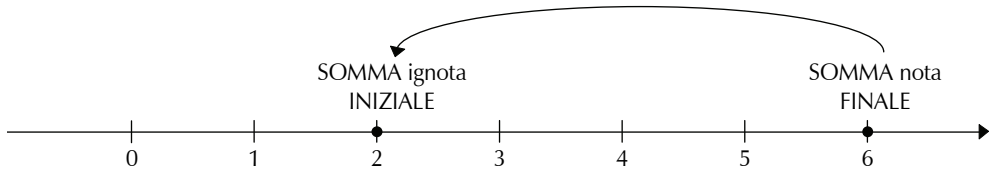
Oltre che in semplici e complesse, un altro importante criterio di classificazione delle operazioni finanziarie è quello che le vede distinte in operazioni di capitalizzazione ed operazioni di attualizzazione.

Si parlerà di operazione di capitalizzazione quando, dato un certo capitale ad un determinato istante iniziale, si vuole stabilire l'importo equivalente disponibile ad un tempo successivo. Al contrario, si parlerà di operazione di attualizzazione quando, dato un capitale ad una specifica epoca futura, si vuole determinare l'importo equivalente disponibile oggi (o comunque ad un istante precedente la scadenza).

Rappresentazione sull'asse dei tempi dell'operazione di capitalizzazione



Rappresentazione sull'asse dei tempi dell'operazione di attualizzazione



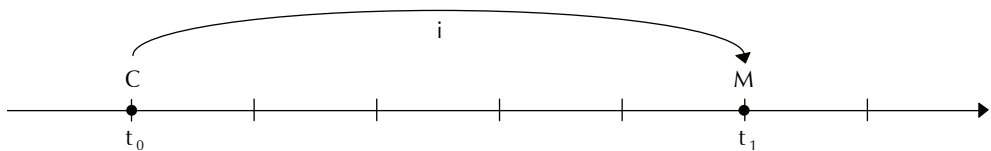
Esaminiamo in maniera più approfondita ciascuna delle due tipologie di operazioni, presentando le grandezze che le caratterizzano, oltre che alcuni esempi numerici.

1.3.1. Operazioni di capitalizzazione (o investimento)

Come già precisato, definiamo capitalizzazione un'operazione nella quale un soggetto economico si priva di una disponibilità di capitale oggi nella prospettiva di averne una superiore o uguale in futuro.

Considerate due situazioni finanziarie elementari (t_0, C) e (t_1, M) , con $t_1 > t_0$, si definisce:

- C il capitale iniziale;
- M il montante finale;
- $(t_1 - t_0)$ la durata dell'operazione;
- I l'interesse dell'operazione;
- i il tasso d'interesse applicato all'operazione, relativo al periodo $t_1 - t_0$;



L'interesse rappresenta il compenso che l'investitore richiede alla controparte per rinunciare temporaneamente al proprio capitale. Ne consegue, quindi, che il montante, ovvero l'importo che verrà restituito all'investitore al termine dell'operazione, sarà dato dalla somma tra il capitale inizialmente disponibile e la remunerazione ottenuta a seguito dell'investimento

$$M = C + I$$

da cui, esplicitando I , si ottiene

$$I = M - C.$$

Grazie alle relazioni appena presentate possiamo concludere che il montante è sempre maggiore o uguale al capitale iniziale. Nessun soggetto economico razionale accetterebbe, infatti, di scambiare una somma disponibile oggi con una inferiore esigibile ad un'epoca futura; questo implica che da ora in poi ipotizzeremo $i \geq 0$.

Rapportando l'interesse al capitale inizialmente disponibile, si ricava il tasso d'interesse dell'operazione relativo al periodo $t_1 - t_0$

$$i = \frac{M - C}{C} = \frac{I}{C}$$

grazie al quale è possibile valutare il grado di redditività dell'operazione. A parità di durata, infatti, maggiore è il tasso i dell'operazione maggiore sarà il guadagno che essa comporterà.

Si osservi che la precedente equazione può essere così riscritta

$$M = C(1 + i)$$

dalla quale si evince che, dato un capitale iniziale C , il montante M si ottiene moltiplicando C per il fattore di capitalizzazione $u = (1 + i)$, detto binomio di capitalizzazione. Il fattore di montante è una quantità maggiore od uguale all'unità.

Esempio di un'operazione di capitalizzazione

Investiamo oggi la somma di € 90 in un titolo che tra due anni potremo rivendere a € 100. Dopo aver individuato capitale e montante, determinare l'interesse, il tasso d'interesse ed il fattore di montante dell'operazione.

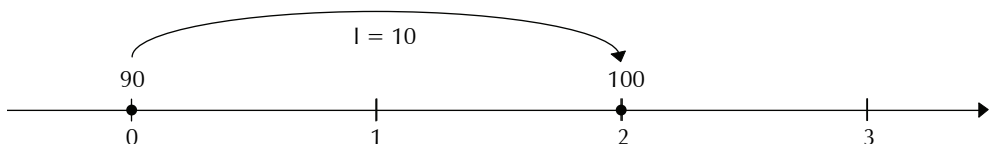
Il capitale iniziale C a disposizione dell'investitore è € 90 mentre il montante M al termine dell'operazione è € 100. Applicando le formule si ottiene:

$$I = M - C = 100 - 90 = 10$$

$$i = \frac{100 - 90}{90} = \frac{10}{90} = 11,11\%$$

Fattore di capitalizzazione $u = 1 + i = 1,11$

Graficamente

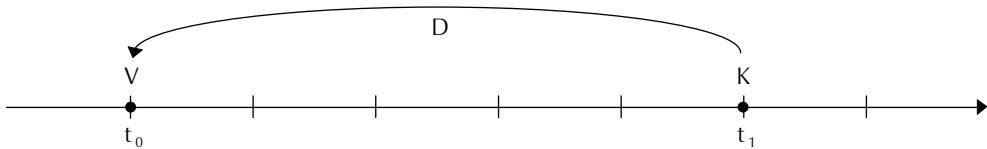


1.3.2. Operazioni di attualizzazione (o di sconto – o di anticipazione)

Opposta alla capitalizzazione è l'attualizzazione, operazione nella quale un soggetto economico, pur di entrare anticipatamente in possesso di una somma disponibile ad una scadenza futura, rinuncia ad una parte di essa.

Considerate due situazioni finanziarie elementari (t_0, V) e (t_1, K) , con $t_1 > t_0$, si definisce:

- K il capitale a scadenza;
- V il valore attuale o anticipato o scontato di K ;
- $(t_1 - t_0)$ la durata dell'operazione;
- D lo sconto dell'operazione;
- d il tasso di sconto applicato all'operazione, relativo al periodo $t_1 - t_0$;
- $\frac{D}{K}$ il fattore di attualizzazione o di sconto o di anticipazione.



Lo sconto rappresenta la somma alla quale rinuncia il detentore di un capitale fruibile ad un istante futuro purché la sua disponibilità venga anticipata ad un'epoca antecedente. Ne consegue, quindi, che il valore attuale di un capitale sarà dato dalla differenza tra il capitale disponibile ad una data epoca futura e lo sconto riconosciuto nell'operazione:

$$V = K - D$$

da cui, esplicitando D , si ottiene

$$D = K - V.$$

In un'operazione di anticipazione il valore attuale è quindi sempre inferiore o uguale al capitale a scadenza.

Il tasso di sconto relativo al periodo $t_1 - t_0$, è il rapporto tra lo sconto e il capitale a scadenza

$$d = \frac{K - V}{K} = \frac{D}{K}.$$

Al pari del tasso di interesse nel caso delle operazioni di capitalizzazione,

il tasso di sconto rappresenta un utile strumento per stimare il grado di redditività delle operazioni di attualizzazione. Dal punto di vista di chi richiede lo sconto, minore è il tasso applicato, maggiore sarà la convenienza nell'eseguire l'operazione.

Si osservi che la precedente equazione può essere così riscritta

$$V = K(1 - d)$$

dalla quale si evince che, dato un capitale a scadenza K , il valore attuale si ottiene moltiplicando K per il fattore di attualizzazione $v = (1 - d)$.

Si osservi che il fattore di sconto è un numero compreso tra zero e uno, ossia $0 < v \leq 1$.

Esempio

Scontiamo oggi una cambiale del valore nominale di € 100 con scadenza tra due anni incassando oggi € 90. Dopo aver individuato capitale a scadenza e valore attuale, calcolare lo sconto, il tasso di sconto ed il fattore di attualizzazione dell'operazione.

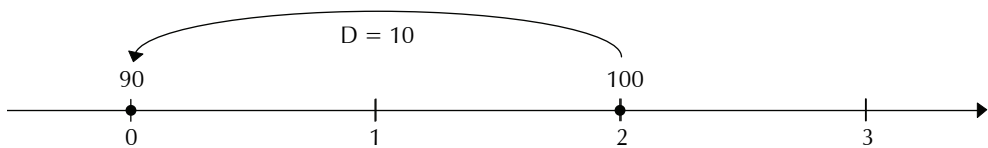
Il capitale a scadenza K (disponibile tra due anni) è € 100 mentre il valore attuale V è € 90 (inferiore a K). Applicando le formule si ottiene:

$$D = K - V = 100 - 90 = 10$$

$$d = \frac{100 - 90}{100} = \frac{10}{100} = 10,00\%$$

Fattore di attualizzazione $v = 1 - d = 0,9$.

Graficamente



1.4. Relazioni tra le grandezze finanziarie fondamentali

Nei paragrafi precedenti abbiamo visto, procedendo parallelamente tra operazioni di capitalizzazione e attualizzazione, che

$$i = \frac{M - C}{C} \qquad d = \frac{K - V}{K}$$

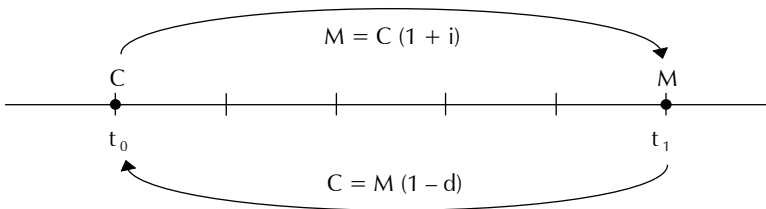
da cui possiamo ricavare che

$$\begin{aligned} Ci &= M - C & Kd &= K - V \\ M &= C(1 + i) & V &= K(1 - d) \\ u &= (1 + i) = \frac{M}{C} & v &= (1 - d) = \frac{V}{K} \end{aligned}$$

Ipotizziamo ora di considerare due situazioni finanziarie intertemporalmente equivalenti (t_0 ; C) e (t_1 ; M). Se M disponibile in t_1 è l'equivalente finanziario di C disponibile in t_0 , allora possiamo chiamare M montante di C o C valore attuale di M.

Questo ci permette di riscrivere il gruppo di formule relative all'attualizzazione in funzione di M e C:

$$\begin{aligned} Md &= M - C \\ C &= M(1 - d) \\ v &= (1 - d) = \frac{C}{M} \end{aligned}$$



Concentrandoci ora sulle relazioni:

$$\begin{aligned} M &= C(1 + i) = C \cdot u \\ C &= M(1 - d) = M \cdot v \end{aligned}$$

e supponendo che le grandezze siano relative alla medesima operazione finanziaria, procedendo per sostituzione possiamo ottenere

$$C = C(1 + i)(1 - d)$$

ovvero, semplificando C in entrambi i membri

$$1 = (1 + i)(1 - d)$$

Osserviamo che il fattore di attualizzazione v è il reciproco del fattore di montante u

$$v = \frac{1}{u}$$

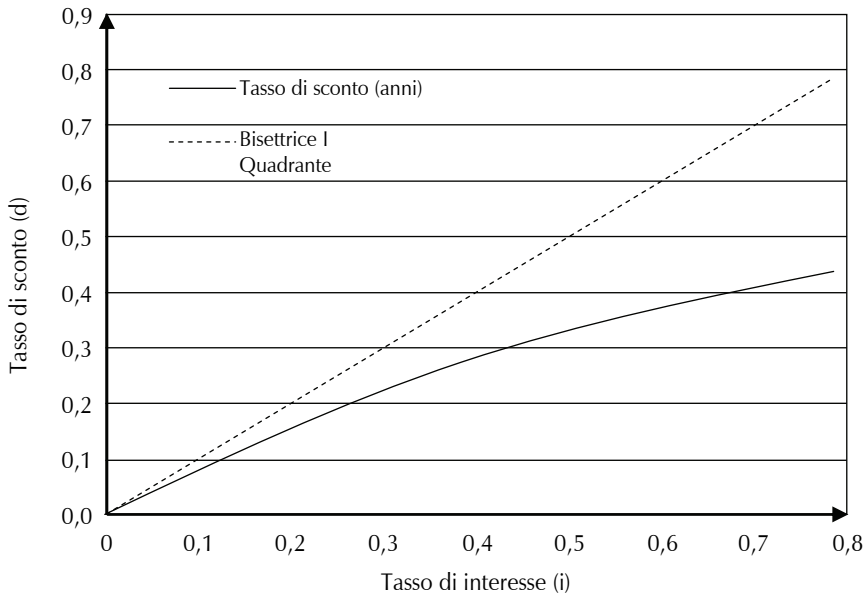
Esplicitando prima i e poi d, si possono ricavare le relazioni che legano

tasso d'interesse e tasso di sconto, vale a dire:

$$i = \frac{d}{1-d}$$

$$d = \frac{i}{i+1}$$

Esaminando il grafico che rappresenta il tasso di sconto in funzione del tasso di interesse, possiamo facilmente osservare come per ogni operazione finanziaria riferita ad una stessa durata, all'aumentare del tasso di interesse, cresca anche il tasso di sconto. Risulta altresì evidente come il secondo sia sempre inferiore al primo (cioè $i > d$).



Infine il valore attuale di M , $C = M(1 - d)$, alla luce della relazione tra u e v , può essere riscritto come

$$C = \frac{M}{(1+i)}$$

che ci permette di concludere che per attualizzare una somma M disponibile a scadenza è sufficiente moltiplicarla per il fattore di attualizzazione o dividerla per il fattore di capitalizzazione, essendo uno il reciproco dell'altro.

1.5. Leggi finanziarie di capitalizzazione

Una volta introdotte le grandezze principali coinvolte in un'operazione finanziaria (sia essa semplice o complessa) che prevedono lo scambio di SFE

fissate nel tempo, vediamo ora come le stesse possono essere espresse in funzione del tempo.

Si definisce legge finanziaria di capitalizzazione (L.F.C.) una funzione del tipo $M = f(C, t_0, t_1)$ che, dato un capitale C riferito ad un istante di tempo iniziale t_0 , consente di determinare univocamente il montante equivalente disponibile ad una qualunque epoca successiva $t_1 \geq t_0$.

Affinché si possa parlare di legge finanziaria di capitalizzazione è necessario che la funzione $M = f(C, t_0, t_1)$ goda delle seguenti proprietà:

1. $f(C, t_0, t_1)$ deve essere definita per ogni $C \geq 0$ e per ogni $t_0, t_1 \in [0, T)$: dato un qualsiasi capitale iniziale C non negativo, è sempre possibile calcolare il montante equivalente riferito ad una qualunque epoca successiva.

2. $f(0, t_0, t_1) = 0$ per ogni $t_0, t_1 \in [0, T)$: indipendentemente da quale sia l'orizzonte temporale dell'investimento, il montante di un capitale nullo è nullo.

3. $f(C, t_0, t_0) = C$ per ogni $C \geq 0$: indipendentemente da quale sia l'ammontare del capitale iniziale, il suo investimento per un orizzonte temporale nullo non produce alcun interesse (montante e capitale, quindi, coincidono).

4. $0 \leq C_1 < C_2 \Rightarrow f(C_1, t_0, t_1) < f(C_2, t_0, t_1)$: a parità di orizzonte temporale, dati due capitali C_1 e C_2 di cui il primo di ammontare inferiore al secondo, il montante di C_1 è inferiore a quello di C_2 .

5. $0 \leq t_1 < t_2 \Rightarrow f(C, t_0, t_1) \leq f(C, t_0, t_2)$: a parità di capitale iniziale investito, il montante relativo ad un data scadenza t_2 è di ammontare almeno pari a quello ottenibile in corrispondenza di una qualunque altra scadenza t_1 precedente.

6. $f(C_1 + C_2, t_0, t_1) = f(C_1, t_0, t_1) + f(C_2, t_0, t_1)$: a parità di orizzonte temporale, il montante della somma di due capitali è uguale alla somma dei montanti dei due capitali.

7. $f(C, t_0, t_1) = Cf(1, t_0, t_1)$: ipotizziamo l'omogeneità di grado uno della funzione rispetto al capitale. Il montante generato da un investimento di un capitale C è uguale a C volte il montante generato, per la medesima durata, da un capitale unitario.

Con riferimento a quest'ultima proprietà ed ipotizzando $t_0 = 0$ e $t_1 - t_0 = t$, possiamo scrivere che

$$M = f(C, t_0, t_1) = Cf(1, t_0, t_1) = Cf(1, 0, t) = Cm(t)$$

dove $m(t)$ rappresenta il fattore di montante. Esso è funzione dipendente solo dal tempo, vale a dire dall'orizzonte temporale dell'operazione, ed esprime il montante in t di un'unità di capitale investita in $t_0 = 0$.

Per esprimere il montante prodotto tra due epoche, t_0 e t_1 (con $0 \leq t_0 \leq t_1$), verrà utilizzata la funzione $\mu(t_0, t_1)$.

Applicando le sette proprietà viste in precedenza ad una funzione dipendente solo dal tempo siamo in grado di individuare le condizioni che essa de-

ve soddisfare per essere considerata fattore di montante:

1. $m(t)$ deve essere definita per ogni $t \in [0, T)$;
2. non applicabile (proprietà riferita al capitale);
3. $m(0) = 1$;
4. non applicabile (proprietà riferita al capitale);
5. $0 \leq t_1 < t_2 \Rightarrow m(t_1) \leq m(t_2)$;
6. non applicabile (proprietà riferita al capitale);
7. definizione di $m(t)$.

Da ciò si può quindi concludere che ogni funzione $m(t)$ definita in $t \in [0, T)$, ivi monotona non decrescente e tale che $m(0) = 1$, rappresenta un fattore di montante o di capitalizzazione. È necessario sottolineare come le proprietà 1, 3 e 5 debbano essere congiuntamente rispettate; il venir meno anche di una sola di esse esclude che la funzione possa essere considerata fattore di montante.

Con riferimento alla quinta proprietà va poi osservato come, laddove la funzione sia derivabile, sia sufficiente verificare che $m'(t) \geq 0$.

Dalla relazione

$$M = Cm(t)$$

possiamo a questo punto ricavare interesse e tasso di interesse in funzione del tempo t :

$$I(t) = M(t) - C = Cm(t) - C = C [m(t) - 1]$$

$$i(t) = \frac{I(t)}{C} = \frac{C[m(t) - 1]}{C} = [m(t) - 1]$$

Esempio

Stabilire se la funzione $f(t) = (1 + t)^{1/10}$ rappresenta una legge finanziaria di capitalizzazione.

Affinché la funzione sia una legge finanziaria di capitalizzazione è necessario verificare che siano soddisfatte tre condizioni:

1. $f(t)$ definita per ogni $t \in [0, T)$.

VERO: essendo il dominio della funzione $[-1, +\infty)$, essa è definita $\forall t \in [0, T)$;

2. $f(0) = 1$.

VERO: procedendo per sostituzione si ottiene $f(0) = (1 + 0)^{1/10} = (1)^{1/10} = 1$;

3. $f(t)$ monotona non decrescente.

VERO: dal momento che la funzione è derivabile è sufficiente verificare che $f'(t) \geq 0$ quindi, svolgendo i calcoli:

$$f'(t) = \frac{1}{10} (1 + t)^{-9/10} = \frac{1}{10^{10} \sqrt[10]{(1 + t)^9}} > 0, \forall t \geq 0$$

risultando congiuntamente verificate tutte e tre le condizioni è possibile affermare che la funzione di partenza è una legge finanziaria di capitalizzazione.

Esempio

Stabilire per quali valori del parametro reale h , la funzione $f(t) = \frac{2}{1 + e^{ht}}$ con $t \geq 0$ rappresenta una legge finanziaria di capitalizzazione.

A differenza dell'esercizio precedente, in questo caso non sarà sufficiente provare che le tre condizioni richieste ai fattori di montanti siano soddisfatte ma si dovrà stabilire per quali valori del parametro h ciò eventualmente accade.

1. $f(t)$ definita per ogni $t \in [0, T)$.

Coincidendo il dominio di $f(t)$ con \mathbb{R} , sicuramente è definita in $[0, T)$; **CONDIZIONE VERIFICATA** per ogni $h \in \mathbb{R}$;

2. $f(0) = 1$.

procedendo per sostituzione si ottiene

$$f(0) = \frac{2}{1 + e^{h \cdot 0}} = \frac{2}{1 + 1} = \frac{2}{2} = 1$$

CONDIZIONE VERIFICATA per ogni $h \in \mathbb{R}$;

3. $f(t)$ monotona non decrescente.

La funzione è derivabile quindi, per verificare questa condizione, è sufficiente porre $f'(t) \geq 0$:

$$f'(t) = -\frac{2}{(1 + e^{ht})^2} \cdot e^{ht} \cdot h = -\frac{2he^{ht}}{(1 + e^{ht})^2}$$

che risulta non negativa quando $h \leq 0$.

In conclusione $f(t)$ è legge finanziaria di capitalizzazione se e solo se $h \leq 0$.

Esempio

Stabilire se la funzione $f(t) = 2 - 4t - 2^t$ rappresenta una legge finanziaria di capitalizzazione.

Come nei casi precedenti, è necessario verificare che siano soddisfatte le tre condizioni:

1. $f(t)$ definita per ogni $t \in [0, T)$.

VERO: essendo \mathbb{R} il dominio della funzione in questione, sicuramente essa è definita in $[0, T)$;

2. $f(0) = 1$.

VERO: procedendo per sostituzione si ottiene $f(0) = 2 - 4 \cdot 0 - 2^0 = 2 - 0 - 1 = 1$;

3. $f(t)$ monotona non decrescente.

FALSO: calcolando la derivata prima della funzione si scopre che:

$$f'(t) = 0 - 4 - 2^t \cdot \ln 2 < 0$$

dove con \ln indichiamo il logaritmo naturale.

Poiché la terza condizione non è soddisfatta si può concludere che la funzione non è una legge finanziaria di capitalizzazione.

1.6. Leggi finanziarie di attualizzazione

Assegnata una legge finanziaria di capitalizzazione rappresentata dal fattore di montante $m(t)$, risulta univocamente determinata la legge finanziaria di attualizzazione ad essa associata o coniugata

$$v(t) = \frac{1}{m(t)}$$

Le proprietà del fattore di sconto si deducono a partire da quelle di $m(t)$. Pertanto il fattore di attualizzazione è una funzione definita e **positiva** in $t \in [0, T)$, ivi monotona non crescente e tale che $v(0) = 1$. Con riferimento alla positività del fattore di sconto, va osservato che essa deriva dalla positività del fattore di montante; inoltre il fatto che quest'ultimo sia maggiore o uguale a uno garantisce che $0 \leq v(t) \leq 1$.

Dalla relazione

$$C = Mv(t)$$

possiamo ricavare sconto e tasso di sconto in funzione del tempo t :

$$D(t) = M - C = M - Mv(t) = M[1 - v(t)]$$

$$d(t) = \frac{D(t)}{M} = \frac{M[1 - v(t)]}{M} = [1 - v(t)].$$

Esempio

Stabilire se la funzione $v(t) = \frac{1}{1 + 0,2t}$ rappresenta una legge finanziaria di attualizzazione.

Affinché la funzione sia una legge finanziaria di attualizzazione è necessario verificare che siano soddisfatte tre condizioni:

1. $v(t)$ definita positiva per ogni $t \in [0, T)$.

VERO: essendo $\mathbb{R} - \{-5\}$ il dominio della funzione in questione, essa è definita in $[0, T)$; osservando che numeratore e denominatore sono entrambi positivi nell'insieme di definizione, possiamo concludere che il valore della funzione è sempre maggiore di zero;

2. $v(0) = 1$.

VERO: procedendo per sostituzione si ottiene

$$v(0) = \frac{1}{1+0,2t} = \frac{1}{1+0} = 1;$$

3. $v(t)$ monotona non crescente.

VERO: è sufficiente verificare che $v'(t) \leq 0$ quindi, svolgendo i calcoli:

$$v'(t) = -\frac{0,2}{(1+0,2t)^2} \leq 0,$$

risultando congiuntamente verificate tutte e tre le condizioni è possibile affermare che la funzione di partenza è una legge finanziaria di attualizzazione.

Nella pratica vengono impiegate leggi finanziarie di capitalizzazione e attualizzazione che appartengono a tre famiglie di funzioni: di tipo lineare, iperbolico e esponenziale. Ciascuna famiglia di leggi finanziarie prende il nome di regime finanziario, il cui studio sarà oggetto del capitolo successivo.

1.7. Tasso di interesse e tasso di sconto

Come già evidenziato nel corso dei precedenti paragrafi tanto l'interesse quanto lo sconto possono essere posti in relazione, rispettivamente, con il capitale ed il montante.

Nel primo caso si otterrà il tasso di interesse relativo alla durata t

$$i(t) = \frac{I(t)}{C} = \frac{M - C}{C} = \frac{Cm(t) - C}{C} = \frac{C[m(t) - 1]}{C} = [m(t) - 1]$$

che quindi può essere ricavato come differenza tra il fattore di montante e l'unità.

Nel secondo caso si otterrà invece il tasso di sconto relativo alla durata t

$$d(t) = \frac{D(t)}{M} = \frac{M - C}{M} = \frac{M - Mv(t)}{M} = \frac{M[1 - v(t)]}{M} = [1 - v(t)]$$

a sua volta ottenibile come differenza tra l'unità e il fattore di sconto.

Qualora poi la durata dell'operazione sia unitaria (vale a dire $t = 1$), è possibile ricavare il tasso effettivo unitario di interesse e il tasso effettivo unitario di sconto:

$$\begin{aligned} i(1) &= [m(1) - 1] = i \\ d(1) &= [1 - v(1)] = d \end{aligned}$$