

# 1

## Nozioni introduttive

### 1.1 Maggioranti, massimo, estremo superiore

**Esempi.** *Determinare gli eventuali maggioranti/minoranti dei seguenti insiemi, studiandone poi la limitatezza.*

1.1

$$X = (-3, 0)$$

Ricordiamo che, dato un insieme non vuoto di numeri reali  $X$ , si dice:

- **maggiorante di  $X$** , un qualsiasi  $k \in \mathbb{R}$  tale che  $k \geq x, \forall x \in X$ ;
- **minorante di  $X$** , un qualsiasi  $k \in \mathbb{R}$  tale che  $k \leq x, \forall x \in X$ .

Nell'esempio proposto, per definizione, sono maggioranti di  $X$  tutti i numeri reali  $k \geq 0$ , sono minoranti di  $X$  tutti i numeri reali  $k \leq -3$ .

Poiché un insieme non vuoto di numeri reali  $X$ , si dice:

- **limitato superiormente**, se ammette almeno un maggiorante;
- **limitato inferiormente**, se ammette almeno un minorante;
- **limitato**, se è limitato sia inferiormente, sia superiormente;
- **illimitato**, se non è limitato

l'esistenza sia di maggioranti, sia di minoranti ci consente di concludere che  $X$  è limitato.

1.2

$$X = [2, +\infty)$$

L'insieme  $X$  non ammette maggioranti; sono invece minoranti di  $X$  tutti i numeri reali  $k \leq 2$ . Di conseguenza, l'insieme  $X$  è superiormente illimitato e inferiormente limitato.

1.3

$$X = [2, 4) \cup (5, 9]$$

Sono maggioranti di  $X$  tutti i numeri reali  $k \geq 9$ ; sono minoranti di  $X$  tutti i numeri reali  $k \leq 2$ . Di conseguenza, l'insieme  $X$  è limitato.

**Esempi.** Determinare l'eventuale massimo e minimo dei seguenti insiemi di numeri reali.

1.4

$$X = [-3, 0]$$

Ricordiamo che, dato un insieme non vuoto di numeri reali  $X$ , si dice:

- **massimo di  $X$** , se esiste, un numero  $M \in \mathbb{R}$  tale che  $M \in X$  e  $M \geq x, \forall x \in X$ ; si pone anche  $M = \max X$ ;
- **minimo di  $X$** , se esiste, un numero  $m \in \mathbb{R}$  tale che  $m \in X$  e  $m \leq x, \forall x \in X$ ; si pone anche  $m = \min X$ .

Nell'esempio proposto, risulta  $-3 \in X$  e  $-3 \leq x$  per ogni  $x \in X$ , quindi  $\min X = -3$ . Inoltre,  $0 \in X$  è tale che  $0 \geq x$  per ogni  $x \in X$ , quindi  $\max X = 0$ .

1.5

$$X = (-\infty, 2]$$

L'insieme  $X$  è inferiormente illimitato, quindi non ammette minimo. Inoltre,  $2 \in X$  e  $2 \geq x$  per ogni  $x \in X$ , quindi  $\max X = 2$ .

1.6

$$X = [2, 4) \cup (5, 9)$$

Risulta  $2 \in X$  e  $2 \leq x$  per ogni  $x \in X$ , quindi 2 è il minimo di  $X$ . L'insieme  $X$  non ammette massimo. Infatti, supponiamo, per assurdo, che esista  $M \in X$  tale che  $M \geq x$  per ogni  $x \in X$ . Allora, per la **densità dei numeri razionali ed irrazionali in  $\mathbb{R}$** , esiste  $x_0 \in \mathbb{R}$  tale che  $M < x_0 < 9$ . Di conseguenza,  $x_0 \in X$  e  $x_0 > M$ , contro il fatto che  $M$  è il massimo di  $X$ . La contraddizione a cui siamo giunti implica che la nostra premessa (esiste il massimo di  $X$ ) è falsa.

1.7

$$X = [-3, +\infty) \cup \{-5, -4\}$$

Risulta  $-5 \in X$  e  $-5 \leq x$ , per ogni  $x \in X$ , quindi  $\min X = -5$ . L'insieme  $X$  non ammette massimo poiché è superiormente illimitato.

**Esempi.** Determinare l'eventuale estremo superiore ed estremo inferiore dei seguenti insiemi.

1.8

$$X = [-2, 5]$$

Ricordiamo che, dato un insieme non vuoto di numeri reali  $X$ , si dice:

- **estremo superiore di  $X$** , il minimo  $S$  dei maggioranti di  $X$ ;
- **estremo inferiore di  $X$** , il massimo  $s$  dei minoranti di  $X$ .

Nell'esempio proposto l'insieme dei maggioranti è l'intervallo  $[5, +\infty)$ , quindi il minimo di tale insieme è 5 che è estremo superiore di  $X$ ; l'insieme dei minoranti di  $X$  è l'intervallo  $(-\infty, -2]$ : il massimo di tale insieme è  $-2$  che è estremo inferiore di  $X$ .

Si noti che 5 e  $-2$  sono rispettivamente massimo e minimo di  $X$ .

1.9

$$X = (-2, 5)$$

L'insieme dei maggioranti di  $X$  è l'intervallo  $[5, +\infty)$ , quindi il minimo di tale insieme è 5 che è estremo superiore di  $X$ ; l'insieme dei minoranti di  $X$  è l'intervallo  $(-\infty, -2]$ : il massimo di tale insieme è  $-2$  che è estremo inferiore di  $X$ . Si noti che  $X$  non ammette né massimo, né minimo.

1.10

$$X = (-\infty, 1]$$

L'insieme  $X$  è inferiormente illimitato, quindi non ammette estremo inferiore. L'insieme dei maggioranti di  $X$  è l'intervallo  $[1, +\infty)$  il cui minimo è 1: dunque, 1 è l'estremo superiore (che è anche massimo) di  $X$ .

1.11

$$X = (0, 3) \cup [5, 8)$$

L'insieme dei minoranti di  $X$  è l'intervallo  $(-\infty, 0]$  che ammette 0 come massimo: 0 è l'estremo inferiore (ma non è minimo) di  $X$ . L'insieme dei maggioranti di  $X$  è l'intervallo  $[8, +\infty)$  che ammette 8 come minimo: 8 è estremo superiore (ma non massimo) di  $X$ .

1.12

$$X = [2, +\infty) \cup \{0, 1/4\}$$

L'insieme dei minoranti di  $X$  è l'intervallo  $(-\infty, 0]$  che ammette 0 come massimo: 0 è l'estremo inferiore (che è anche minimo) di  $X$ . L'insieme  $X$  è superiormente illimitato, quindi non ammette estremo superiore.

**Esercizio 1** (sol. pag. 223) Determinare gli eventuali maggioranti/minoranti dei seguenti insiemi, studiandone poi la limitatezza.

- |                              |                                    |
|------------------------------|------------------------------------|
| 1. $(5, 9]$                  | 2. $\{-3, 2, 6\}$                  |
| 3. $(-\infty, 7)$            | 4. $(-\infty, -2) \cup \{1, 3/2\}$ |
| 5. $[-\pi, 0) \cup (1, e]$   | 6. $[2, 4) \cup \{-1, 9\}$         |
| 7. $(-2, 7] \cap \mathbb{N}$ | 8. $(-2, 7] \cup \mathbb{N}$       |

**Esercizio 2** (sol. pag. 223) Determinare l'eventuale massimo e minimo dei seguenti insiemi.

- |                                |                                   |
|--------------------------------|-----------------------------------|
| 1. $(0, 3]$                    | 2. $\{-1, 2, 5/2\}$               |
| 3. $(-\infty, 1)$              | 4. $(-\infty, 0) \cup \{1, 3/2\}$ |
| 5. $[-e, 0) \cup (1, \pi]$     | 6. $[2, 4) \cup \{-1, 9\}$        |
| 7. $(-4, 5/2] \cap \mathbb{N}$ | 8. $[-3/2, 5/2] \cup \mathbb{N}$  |

**Esercizio 3** (sol. pag. 223) Determinare l'eventuale estremo superiore ed inferiore dei seguenti insiemi.

- |                                |                                                                          |
|--------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|
| 1. $[-2, 3/2)$                 | 2. $(-\infty, 4)$                                                        |
| 3. $[0, 1) \cup (e, \pi]$      | 4. $(2, +\infty) \cup \{1, 3/2\}$                                        |
| 5. $(0, 3] \cup \{-1, 9\}$     | 6. $\left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$ |
| 7. $(-2, 7/3] \cap \mathbb{N}$ | 8. $(-3/2, 5/2) \cup \mathbb{N}$                                         |

## 1.2 Richiami di topologia

**Esempi.** Determinare l'intorno circolare di raggio  $\delta$  del punto  $x_0$ .

**1.13**

|                             |
|-----------------------------|
| $x_0 = 3; \quad \delta = 1$ |
|-----------------------------|

Ricordiamo che l'**intorno circolare**  $I_\delta(x_0)$  di raggio  $\delta > 0$  del punto (detto *centro*)  $x_0 \in \mathbb{R}$  è l'intervallo aperto di estremi  $x_0 - \delta$  e  $x_0 + \delta$ :

$$I_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Nell'esempio proposto, abbiamo:

$$x_0 - \delta = 3 - 1 = 2; \quad x_0 + \delta = 3 + 1 = 4$$

quindi  $I_1(3) = (2, 4)$ .

**1.14**

$$x_0 = -3; \quad \delta = 4$$

Poiché  $x_0 - \delta = -7$  e  $x_0 + \delta = 1$ , si ricava  $I_4(-3) = (-7, 1)$ .

**1.15**

$$x_0 = 1; \quad \delta = \frac{1}{4}$$

Risulta:

$$x_0 - \delta = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}; \quad x_0 + \delta = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

quindi  $I_{1/4}(1) = (3/4, 5/4)$ .

**1.16**

$$x_0 = -\frac{2}{5}; \quad \delta = \frac{7}{3}$$

Risulta:

$$x_0 - \delta = -\frac{2}{5} - \frac{7}{3} = -\frac{41}{15}; \quad x_0 + \delta = -\frac{2}{5} + \frac{7}{3} = \frac{29}{15}$$

quindi  $I_{7/3}(-2/5) = (-41/15, 29/15)$ .

**Esempi.** *Determinare l'intorno sinistro e l'intorno destro di raggio  $\delta$  del punto  $x_0$ .*

**1.17**

$$x_0 = 3; \quad \delta = 2$$

Ricordiamo che si dice:

- **intorno sinistro**  $I_{\delta}^{-}(x_0)$  di raggio  $\delta > 0$  di  $x_0 \in \mathbb{R}$  l'intervallo:

$$I_{\delta}^{-}(x_0) = (x_0 - \delta, x_0];$$

- **intorno destro**  $I_{\delta}^{+}(x_0)$  di raggio  $\delta > 0$  di  $x_0 \in \mathbb{R}$  l'intervallo:

$$I_{\delta}^{+}(x_0) = [x_0, x_0 + \delta).$$

Nell'esempio proposto abbiamo:

$$x_0 - \delta = 3 - 2 = 1; \quad x_0 + \delta = 3 + 2 = 5$$

e quindi:

$$I_2^-(3) = (1, 3]; \quad I_2^+(3) = [3, 5).$$

**1.18**

$$x_0 = 0; \quad \delta = \frac{2}{3}$$

Poiché  $x_0 - \delta = -2/3$  e  $x_0 + \delta = 2/3$ , si ricava:

$$I_{2/3}^-(0) = \left(-\frac{2}{3}, 0\right]; \quad I_{2/3}^+(0) = \left[0, \frac{2}{3}\right).$$

**1.19**

$$x_0 = -\frac{1}{5}; \quad \delta = \frac{7}{5}$$

Poiché  $x_0 - \delta = -8/5$  e  $x_0 + \delta = 6/5$ , otteniamo:

$$I_{7/5}^-\left(-\frac{1}{5}\right) = \left(-\frac{8}{5}, -\frac{1}{5}\right]; \quad I_{7/5}^+\left(-\frac{1}{5}\right) = \left[-\frac{1}{5}, \frac{6}{5}\right).$$

**Esempi.** *Determinare quale tipo di intorno sono i seguenti intervalli.*

**1.20**

$$(-1, 3)$$

L'intervallo  $(-1, 3)$  è aperto, quindi si tratta di un intorno circolare. Per determinarne<sup>1</sup> il centro, calcoliamo il punto medio del segmento di estremi  $-1$  e  $3$ :

$$x_0 = \frac{-1 + 3}{2} = 1.$$

Il raggio dell'intorno è quindi:  $\delta = 3 - 1 = 2$ . Dunque:  $(-1, 3) = I_2(1)$ .

---

<sup>1</sup>Alternativamente, si può risolvere il sistema lineare in due incognite:

$$\begin{cases} x_0 - \delta = -1 \\ x_0 + \delta = 3 \end{cases}.$$

1.21

$$(-5, -2)$$

L'intervallo  $(-5, -2)$  è aperto, quindi si tratta di un intorno circolare. Per determinarne il centro, calcoliamo il *punto medio* del segmento di estremi  $-5$  e  $-2$ :

$$x_0 = \frac{-5 - 2}{2} = -\frac{7}{2}.$$

Poiché il raggio dell'intorno è  $\delta = -2 + 7/2 = 3/2$ , possiamo concludere che  $(-5, -2) = I_{3/2}(-7/2)$ .

1.22

$$(-1, 4]$$

L'intervallo  $(-1, 4]$  è aperto a sinistra, chiuso a destra, quindi si tratta di un intorno sinistro. Il punto  $x_0$  è  $4$ ; il raggio è dato da  $\delta = 4 - (-1) = 5$ . Dunque:  $(-1, 4] = I_5^-(4)$ .

1.23

$$\left[-2, \frac{8}{3}\right)$$

L'intervallo  $[-2, 8/3)$  è aperto a destra, chiuso a sinistra, quindi si tratta di un intorno destro. Il punto  $x_0$  è  $-2$ ; il raggio è  $\delta = 8/3 - (-2) = 14/3$ . Dunque:  $[-2, 8/3) = I_{14/3}^+(-2)$ .

**Esempi.** Determinare parte interna e frontiera dei seguenti insiemi di numeri reali.

1.24

$$X = (3, 7)$$

Ricordiamo che, dato un insieme non vuoto di numeri reali  $X$ , un qualsiasi numero reale  $x_0$  si dice:

- **punto interno** ad  $X$ , se  $x_0 \in X$  e ammette un suo intorno circolare contenuto in  $X$ ; l'insieme dei punti interni di  $X$  si dice **parte interna** (o **interno**) di  $X$ , indicata con  $\overset{\circ}{X}$ ;
- **punto di frontiera** di  $X$ , se ogni suo intorno circolare contiene sia elementi di  $X$ , sia elementi del suo complementare  $X^C$ ; l'insieme  $\partial X$  dei punti di frontiera di  $X$  si dice **frontiera** di  $X$ .

Ogni punto di  $X = (3, 7)$  è interno ad  $X$ . Infatti, se  $x_0$  è un generico elemento di  $X$ , scelto il minore fra  $(7 - x_0)/2$  e  $(x_0 - 3)/2$  come raggio di un intorno circolare  $I_\delta(x_0)$  di  $x_0$

$$\delta = \min \left\{ \frac{7 - x_0}{2}, \frac{x_0 - 3}{2} \right\},$$

risulta  $I_\delta(x_0) \subset X$ . Ad esempio, se  $x_0 = 4$ , allora:

$$\delta = \min \left\{ \frac{7 - 4}{2}, \frac{4 - 3}{2} \right\} = \frac{1}{2}.$$

L'intorno  $I_{1/2}(4) = (3.5, 4.5)$  è contenuto in  $X$ , quindi 4 è interno a tale insieme. In conclusione:  $\overset{\circ}{X} = X$ .

I punti di frontiera di  $X$  sono 3 e 7: qualunque loro intorno circolare contiene sia punti di  $X$ , sia punti di  $X^C$ . Verifichiamolo per 3. Scelto un suo intorno di raggio  $\delta > 0$ ,  $I_\delta(3) = (3 - \delta, 3 + \delta)$ , osserviamo che:

$$\begin{aligned} 3 - \delta &< 3 && \Leftrightarrow && \delta > 0 \\ 3 + \delta &> 3 && \Leftrightarrow && \delta > 0 \end{aligned}$$

quindi,  $\forall \delta > 0$ , l'intersezione  $I_\delta(3) \cap X$  contiene sia elementi di  $X$ , sia elementi di  $X^C$ . In conclusione,  $\partial X = \{3, 7\}$ .

### 1.25

$X = [-1, +\infty)$

Risulta  $\overset{\circ}{X} = (-1, +\infty)$ . Infatti, se  $x_0 \in (-1, +\infty)$ , scelto:

$$\delta = \frac{x_0 - (-1)}{2}$$

vale  $I_\delta(x_0) \subset X$ . Ad esempio, se  $x_0 = 1$ , allora  $\delta = 1$  e l'intorno  $I_1(1) = (0, 2)$  è contenuto in  $X$ , quindi 1 è interno a tale insieme.

Il punto  $-1$  è invece di frontiera per  $X$ : scelto un qualsiasi suo intorno di raggio  $\delta > 0$ ,  $I_\delta(-1) = (-1 - \delta, -1 + \delta)$ , osserviamo che:

$$\begin{aligned} -1 - \delta &< -1 && \Leftrightarrow && \delta > 0 \\ -1 + \delta &> -1 && \Leftrightarrow && \delta > 0 \end{aligned}$$

ossia che qualunque sia il raggio  $\delta > 0$ , l'intersezione  $I_\delta(-1) \cap X$  contiene sia elementi di  $X$ , sia elementi di  $X^C$ . In conclusione,  $\partial X = \{-1\}$ .

1.26

$$X = \{-3, 2, 5\}$$

L'insieme  $X$  non ha punti interni, quindi  $\overset{\circ}{X} = \emptyset$ . Infatti, tutti gli elementi di  $X$  sono punti di frontiera. Ad esempio, scelto un qualsiasi intorno  $I_\delta(2) = (2 - \delta, 2 + \delta)$  di raggio  $\delta > 0$  di 2, possiamo osservare che se  $\delta < 1$ , allora  $2 \in X \cap I_\delta(2)$  mentre  $X \cap I_\delta(2) \setminus \{2\} = \emptyset$ . In conclusione,  $\partial X = X$ .

**Esempi.** Studiare se i seguenti insiemi siano aperti/chiusi.

1.27

$$X = (3, +\infty)$$

Ricordiamo che, un insieme non vuoto di numeri reali  $X$ , si dice:

- **insieme aperto**, se  $X = \overset{\circ}{X}$ ;
- **insieme chiuso**, se il suo complementare  $X^C$  è aperto; alternativamente,  $X$  è chiuso se e solo se  $\partial X \subseteq X$ .

Tutti i punti di  $(3, +\infty)$  sono interni all'insieme stesso, quindi  $X = \overset{\circ}{X}$ , ossia  $X$  è aperto.

1.28

$$X = (-\infty, -2]$$

La parte interna di  $X$  è  $(-\infty, -2)$ ; il punto  $-2$  è di frontiera per  $X$ , quindi  $\partial X = \{-2\} \subseteq X$ . Di conseguenza,  $X$  è un insieme chiuso.

1.29

$$X = (0, 5]$$

La parte interna di  $X$  è  $(0, 5)$ : quindi  $\overset{\circ}{X} \subset X$ , ossia  $X$  non è aperto. 0 e 5 sono gli unici punti di frontiera di  $X$ , quindi:  $\partial X = \{0, 5\} \not\subseteq X$ . Di conseguenza,  $X$  non è un insieme chiuso.

1.30

$$X = \{0, 5\}$$

La parte interna di  $X$  è vuota, quindi  $\overset{\circ}{X} \subset X$ , ossia  $X$  non è aperto. 0 e 5 sono gli unici punti di frontiera di  $X$ , quindi:  $\partial X = \{0, 5\} = X$ . Di conseguenza,  $X$  è un insieme chiuso.

**Esempi.** Determinare i punti di accumulazione e isolati dei seguenti insiemi.

**1.31**

$$X = (3, 7)$$

Ricordiamo che, dato un insieme non vuoto di numeri reali  $X$ , un numero reale  $x_0$  si dice:

- **punto di accumulazione di  $X$** , se ad ogni suo intorno circolare appartengono elementi di  $X$  diversi da  $x_0$ ; l'insieme dei punti di accumulazione di  $X$  si dice **derivato di  $X$** , indicato con  $X'$ ;
- **punto isolato di  $X$** , se  $x_0 \in X$  ed esiste un intorno circolare di  $x_0$  a cui non appartengono altri elementi di  $X$ .

Ogni elemento di  $X = (3, 7)$  è interno ad  $X$ ; ma ciò implica che, qualunque intorno di  $x_0$  contiene sempre un altro intorno di  $x_0$  contenuto in  $X$  e quindi al quale appartengono infiniti elementi di  $X$  diversi da  $x_0$ . Anche 3 e 7 sono di accumulazione per  $X$ . Ad esempio, scelto un qualsiasi intorno circolare di 3 di raggio  $\delta > 0$ , si ha:

$$(3 - \delta, 3 + \delta) \cap (3, 7) = (3, \min \{3 + \delta, 7\}) \neq \emptyset.$$

In conclusione,  $X' = [3, 7]$ . Non vi sono punti isolati.

**1.32**

$$X = \{3, 7\}$$

L'insieme  $X$  è costituito solo da punti isolati. Infatti,  $3 \in X$  e scelto, ad esempio,  $\delta = 1$ , si ha:

$$I_1(3) \cap X = \{3\}$$

ossia in  $I_1(3)$  non vi sono altri elementi di  $X$  oltre a 3; analogo discorso può essere fatto per 7. In conclusione,  $X' = \emptyset$ .

**Esercizio 4** (sol. pag. 223) Determinare l'intorno circolare di raggio  $\delta$  del punto  $x_0$ .

- |                                     |                                    |
|-------------------------------------|------------------------------------|
| 1. $x_0 = -2; \quad \delta = 3$     | 2. $x_0 = 0; \quad \delta = 3$     |
| 3. $x_0 = -1/2; \quad \delta = 1/2$ | 4. $x_0 = 3/4; \quad \delta = 1/2$ |
| 5. $x_0 = 4; \quad \delta = 3/2$    | 6. $x_0 = 3/2; \quad \delta = 4$   |

**Esercizio 5** (sol. pag. 224) Determinare l'intorno sinistro e l'intorno destro di raggio  $\delta$  del punto  $x_0$ .

- |                              |                             |
|------------------------------|-----------------------------|
| 1. $x_0 = 1; \delta = 3$     | 2. $x_0 = -2; \delta = 1/2$ |
| 3. $x_0 = 3/4; \delta = 5/2$ | 4. $x_0 = -1/3; \delta = 3$ |
| 5. $x_0 = 0; \delta = 3/2$   | 6. $x_0 = 3/2; \delta = 1$  |

**Esercizio 6** (sol. pag. 224) Determinare quale tipo di intorni sono i seguenti intervalli.

- |              |               |               |                |
|--------------|---------------|---------------|----------------|
| 1. $(-3, 1)$ | 2. $(3, 9/2)$ | 3. $(-4, -1)$ | 4. $(e, \pi)$  |
| 5. $(0, 3]$  | 6. $[0, 1/5)$ | 7. $(-2, 1]$  | 8. $[-4, 3/2)$ |

**Esercizio 7** (sol. pag. 224) Determinare parte interna e frontiera dei seguenti insiemi di numeri reali.

- |                           |                    |                              |                              |
|---------------------------|--------------------|------------------------------|------------------------------|
| 1. $(-3, 1)$              | 2. $(-\infty, -2]$ | 3. $(-2, 1]$                 | 4. $[-4, 3/2)$               |
| 5. $(0, 3] \cup (4, 9/2)$ | 6. $(5, +\infty)$  | 7. $(-2, 8) \cap \mathbb{N}$ | 8. $(-2, 8) \cap \mathbb{Q}$ |

**Esercizio 8** (sol. pag. 224) Studiare se i seguenti insiemi siano aperti/chiusi.

- |                   |                            |                              |                              |
|-------------------|----------------------------|------------------------------|------------------------------|
| 1. $(2, 7)$       | 2. $(-\infty, 4]$          | 3. $(-3, 0]$                 | 4. $[-2, 1/4)$               |
| 5. $(3, +\infty)$ | 6. $(-2, 1] \cup (2, 7/2)$ | 7. $(-3, 9) \cap \mathbb{N}$ | 8. $[-2, 8] \cap \mathbb{Q}$ |

**Esercizio 9** (sol. pag. 224) Determinare i punti di accumulazione e isolati dei seguenti insiemi.

- |                              |                              |                              |
|------------------------------|------------------------------|------------------------------|
| 1. $(2, 7)$                  | 2. $\{-2, 1/2, 5\}$          | 3. $(-3, 0] \cup \{1, 2\}$   |
| 4. $(-\infty, 4]$            | 5. $(3, +\infty)$            | 6. $(-2, 1] \cup (2, 7/2)$   |
| 7. $(-5, 8) \cap \mathbb{N}$ | 8. $(-5, 8) \cap \mathbb{Z}$ | 9. $[-4, 7] \cap \mathbb{Q}$ |

## 1.3 Disequazioni razionali intere di primo grado

**Esempi.** Risolvere le seguenti disequazioni razionali intere di primo grado nell'incognita reale  $x$ :

**1.33**

$$3x - 1 \leq 3 - 2x$$

Risolvere la disequazione assegnata significa determinare gli eventuali valori ammissibili dell'incognita  $x$  che rendono la disuguaglianza vera.

A tale scopo è opportuno isolare a sinistra del simbolo di disuguaglianza i termini che contengono l'incognita  $x$  e a destra le costanti, utilizzando i seguenti due principi di equivalenza delle disequazioni:

1. **addizionando o sottraendo** ad entrambi i membri di una disequazione una stessa quantità, si ottiene una disequazione equivalente a quella data.
2. **moltiplicando o dividendo** entrambi i membri di una disequazione per una stessa quantità:
  - (a) **positiva** si ottiene una disequazione equivalente a quella data;
  - (b) **negativa** si ottiene una disequazione equivalente a quella data **invertendo il verso** alla disequazione.

Il problema assegnato ha senso  $\forall x \in \mathbb{R}$ , cioè l'*insieme ammissibile* è  $\mathbb{R}$ . Aggiungendo 1 ad entrambi i membri della disequazione, grazie al primo principio, otteniamo una disequazione equivalente a quella di partenza che ha tutti i termini costanti a destra del segno di disuguaglianza:

$$3x - 1 \boxed{+1} \leq 3 - 2x \boxed{+1} \quad \Leftrightarrow \quad 3x \leq 4 - 2x.$$

Si noti che il passaggio appena effettuato corrisponde al seguente:

$$3x - 1 \leq 3 - 2x \quad \Leftrightarrow \quad 3x \leq 3 + 1 - 2x \quad \Leftrightarrow \quad 3x \leq 4 - 2x.$$

Dunque, possiamo riparafrasare il principio 1. nel seguente modo:

- 1.bis **spostando** da un membro all'altro di una disequazione un termine additivo cambiato di segno, si ottiene una disequazione equivalente a quella data.

Operiamo utilizzando il principio appena enunciato per spostare a sinistra il termine contenente l'incognita  $x$ :

$$3x \leq 4 - 2x \quad \Leftrightarrow \quad 3x + 2x \leq 4 \quad \Leftrightarrow \quad 5x \leq 4.$$

Per isolare l'incognita  $x$  “eliminiamo” il suo coefficiente 5, coerentemente con il principio 2. (della moltiplicazione), moltiplicando entrambi i membri della disequazione per  $1/5$ :

$$5x \boxed{\cdot \frac{1}{5}} \leq 4 \boxed{\cdot \frac{1}{5}} \quad \Leftrightarrow \quad x \leq \frac{4}{5}.$$

L'insieme delle soluzioni della disequazione è quindi l'intervallo  $(-\infty, 4/5]$ .

**1.34**

$$\frac{2x+1}{3} - x < \frac{3}{2}x + 1$$

Il problema ha senso  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Moltiplicando per 6 (minimo comune multiplo fra 2 e 3) entrambi i membri della disequazione, “eliminiamo” i termini frazionari:

$$6 \cdot \left( \frac{2x+1}{3} - x \right) < 6 \cdot \left( \frac{3}{2}x + 1 \right) \Leftrightarrow 4x + 2 - 6x < 9x + 6.$$

Spostiamo a sinistra i termini contenenti l'incognita, a destra le costanti:

$$-2x - 9x < -2 + 6 \Leftrightarrow -11x < 4.$$

Utilizzando il secondo principio di equivalenza, ricaviamo  $x > -4/11$ . L'insieme delle soluzioni è quindi l'intervallo  $(-4/11, +\infty)$ .

**1.35**

$$-2x + 3 \geq 6 - 2(x + 1)$$

Il problema ha senso per ogni  $x \in \mathbb{R}$ . Si ha:

$$-2x + 3 \geq 6 - 2(x + 1) \Leftrightarrow -2x + 2x \geq 6 - 2 - 3$$

cioè  $0 \geq 1$ , conclusione falsa. Dunque, la disequazione non ammette soluzioni, cioè l'insieme delle sue soluzioni è vuoto.

**1.36**

$$\frac{x-1}{3} + 2 \geq \frac{1}{2} - \frac{-x+1}{3} + \frac{1}{6}$$

L'insieme ammissibile è  $\mathbb{R}$ .

Moltiplicando entrambi i termini della disequazione per 6, otteniamo:

$$2(x-1) + 12 \geq 3 - 2(-x+1) + 1.$$

Dal primo principio di equivalenza, ricaviamo:

$$2x - 2x \geq 3 - 2 + 9 + 2 - 12 \Leftrightarrow 0 \geq 0$$

conclusione vera  $\forall x \in \mathbb{R}$ , cioè l'insieme delle soluzioni è  $\mathbb{R}$ .

**Esercizio 10** (sol. pag. 225) Risolvere le seguenti disequazioni razionali intere di primo grado nell'incognita reale  $x$ :

1.  $6\left(-x - \frac{4}{3}\right) + 9x > 5(x + 4) - 6x$
2.  $\frac{25 + 3x}{6} - \frac{2x + 4}{4} < \frac{1}{12}$
3.  $(x + 4)(2x - 4) - \frac{3 - 20x}{5} \leq 2(1 - x)^2 + 12x$
4.  $(x - 1)(x + 3) \geq (x - 2)(x + 3)$

## 1.4 Disequazioni razionali intere di secondo grado

**Esempi.** Risolvere le seguenti disequazioni razionali intere di secondo grado nell'incognita reale  $x$ .

**1.37**

$$x^2 - x - 2 \geq 0$$

Osserviamo preliminarmente che il segno del trinomio di secondo grado  $P(x) = ax^2 + bx + c$ , con  $a > 0$ , dipende dal **discriminante**  $\Delta = b^2 - 4ac$ :

- se  $\Delta > 0$ , allora  $P(x) > 0$  ( $P(x) < 0$ ) per valori esterni (interni) all'intervallo delle radici dell'equazione  $P(x) = 0$ ;
- se  $\Delta = 0$ , allora  $P(x) > 0$  per ogni  $x \neq -b/2a$ ,  $P(x) = 0$  per  $x = -b/2a$ ;
- se  $\Delta < 0$ , allora  $P(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .

L'insieme ammissibile del problema assegnato è  $\mathbb{R}$ .

Il discriminante associato alla disequazione assegnata è:

$$\Delta = 1 + 8 = 9 > 0.$$

Le soluzioni dell'equazione  $x^2 - x - 2 = 0$  sono:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} \Leftrightarrow x_1 = -1 \quad \text{e} \quad x_2 = 2.$$

La disequazione è risolta per  $x \leq -1$  oppure  $x \geq 2$ , cioè l'insieme delle sue soluzioni è  $(-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$ .

**1.38**

$$x^2 + 2x - 3 < 0$$

L'insieme ammissibile è  $\mathbb{R}$ . Calcoliamo il discriminante (si può operare anche con la formula ridotta):  $\Delta = 16 > 0$ . Le soluzioni dell'equazione  $x^2 + 2x - 3 = 0$  sono  $x_1 = -3$  e  $x_2 = 1$ , e la disequazione è risolta per ogni  $-3 < x < 1$ . Dunque, l'insieme delle soluzioni è l'intervallo  $(-3, 1)$ .

**1.39**

$$x^2 + 2\sqrt{2}x + 2 \leq 0$$

L'insieme ammissibile è  $\mathbb{R}$ . Calcoliamo il discriminante associato:

$$\Delta = (2\sqrt{2})^2 - 4 \cdot 2 = 0.$$

Il trinomio  $x^2 + 2\sqrt{2}x + 2$  è positivo per ogni  $x \neq -2\sqrt{2}/2 = -\sqrt{2}$ , nullo per  $x = -\sqrt{2}$ . Dunque, la disequazione assegnata ha come unica soluzione  $x = -\sqrt{2}$ , cioè l'insieme delle sue soluzioni è  $\{-\sqrt{2}\}$ .

**1.40**

$$x^2 - 2x + 3 > 0$$

L'insieme ammissibile è  $\mathbb{R}$ . Poiché il discriminante associato  $\Delta = -8$  è negativo, il trinomio  $x^2 - 2x + 3$  è positivo per ogni  $x \in \mathbb{R}$ , dunque la disequazione è risolta  $\forall x \in \mathbb{R}$ . L'insieme delle sue soluzioni è quindi  $\mathbb{R}$ .

**1.41**

$$2x^2 - 6x \geq 0$$

L'insieme ammissibile è  $\mathbb{R}$ . Pur potendo applicare il metodo impiegato precedentemente, si nota che il problema può essere riscritto come:

$$2x(x - 3) \geq 0.$$

Per la *legge di annullamento del prodotto*, le soluzioni dell'equazione corrispondente  $2x(x - 3) = 0$  sono 0 e 3, e la disequazione è risolta per  $x \leq 0$  oppure  $x \geq 3$ . L'insieme delle soluzioni è quindi  $(-\infty, 0] \cup [3, +\infty)$ .

**1.42**

$$3x^2 - 2 \leq 0$$

L'insieme ammissibile è  $\mathbb{R}$ . L'equazione corrispondente  $3x^2 - 2 = 0$  ammette le due soluzioni distinte  $x_{1,2} = \pm\sqrt{2/3}$ . La disequazione è

così risulta per  $-\sqrt{2/3} \leq x \leq \sqrt{2/3}$ , cioè l'insieme delle soluzioni è l'intervallo  $[-\sqrt{2/3}, \sqrt{2/3}]$ .

**1.43**

$$3x^2 + 2 > 0$$

L'insieme ammissibile è  $\mathbb{R}$ . La quantità  $3x^2 + 2$  è positiva  $\forall x \in \mathbb{R}$  in quanto somma di una quantità positiva (il 2) e di una quantità non negativa ( $3x^2$ ). Quindi la disequazione è risolta da ogni  $x \in \mathbb{R}$ , cioè l'insieme delle soluzioni è  $\mathbb{R}$ .

**Esercizio 11** (sol. pag. 225) Risolvere le seguenti disequazioni di II grado:

- |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|
| 1. $x^2 - 3x - 4 \leq 0$ | 2. $x^2 - 3x + 2 \leq 0$ |
| 3. $x^2 - 2x - 3 \geq 0$ | 4. $x^2 - 2x + 3 \geq 0$ |
| 5. $3x^2 - 2x - 1 > 0$   | 6. $3x^2 + 4x - 4 < 0$   |
| 7. $5x^2 - 7x \leq 0$    | 8. $2x^2 + 8x > 0$       |
| 9. $x^2 - 16 \leq 0$     | 10. $x^2 + 2 < 0$        |
| 11. $(x + 1)^2 \geq 1$   | 12. $(x - 2)^2 < 1$      |

## 1.5 Disequazioni razionali fratte

**Esempi.** Risolvere le seguenti disequazioni razionali fratte:

**1.44**

$$\frac{x + 1}{2x - 4} \geq 0$$

Il problema ha senso se  $2x - 4 \neq 0$ , ossia per  $x \neq 2$ .

Ricordiamo che il segno di una frazione si ottiene, grazie alla *regola dei segni*, noto il segno del suo numeratore (N) e del suo denominatore (D).

Possiamo così riassumere la conseguente strategia risolutiva:

1. studiamo separatamente il segno di numeratore e denominatore;
2. rappresentiamo graficamente i risultati ottenuti, ricavando il segno della frazione, tenendo conto dell'insieme ammissibile;
3. ricaviamo la soluzione del problema assegnato.

Il numeratore è positivo se  $x + 1 > 0$ , cioè per  $x > -1$ . Il denominatore è positivo se  $2x - 4 > 0$ , cioè se  $x > 2$ . Rappresentiamo graficamente quanto ottenuto, utilizzando le seguenti *convenzioni*:

*linea orizzontale tratteggiata* = segno negativo

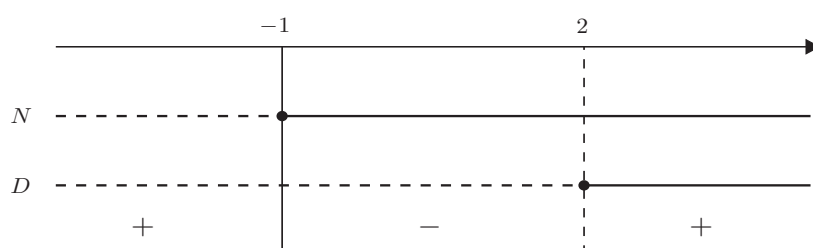
*linea orizzontale continua* = segno positivo

*linea verticale tratteggiata* = valore non ammissibile

*linea verticale continua* = valore ammissibile che annulla un termine

*pallino pieno* = valore per il quale il termine corrispondente si annulla

*pallino vuoto* = valore per il quale il termine non esiste.

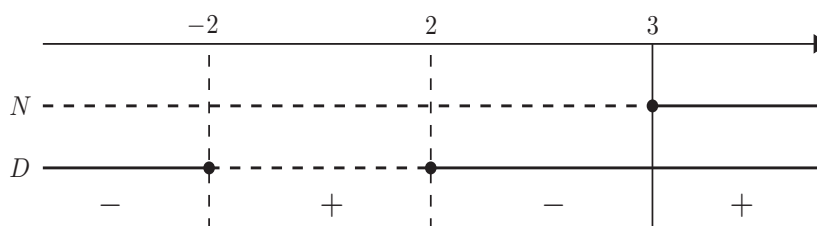


L'insieme delle soluzioni è quindi  $(-\infty, -1] \cup (2, +\infty)$ .

**1.45**

$$\frac{x-3}{x^2-4} \leq 0$$

Il problema ha senso se  $x^2 - 4 \neq 0$ , cioè se  $x \neq \pm 2$ . Il numeratore è positivo se  $x - 3 > 0$  cioè se  $x > 3$ . Il denominatore è positivo se  $x^2 - 4 > 0$  cioè se  $x < -2$  oppure  $x > 2$ . Dunque:

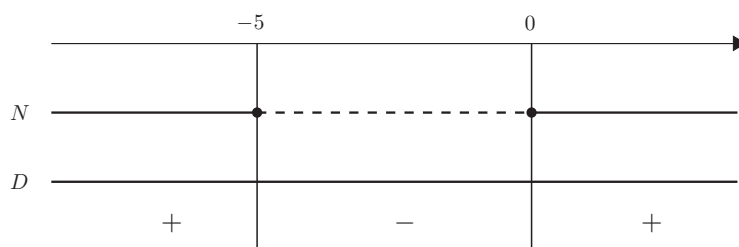


Dato che il problema di partenza ci chiede quando la frazione è non positiva, la disequazione è risolta per  $x < 2$  oppure per  $2 < x \leq 3$ . L'insieme delle soluzioni è quindi  $(-\infty, 2) \cup (2, 3]$ .

**1.46**

$$\frac{x^2 + 5x}{x^2 - 4x + 6} < 0$$

Il problema ha senso se e solo se  $x^2 - 4x + 6 \neq 0$ . Poiché il discriminante associato  $\Delta = -8$  è negativo,  $x^2 - 4x + 6 > 0$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ , quindi l'insieme ammissibile è  $\mathbb{R}$ . Inoltre, il numeratore è positivo se  $x^2 + 5x > 0$ , cioè se  $x(x + 5) > 0$ , ossia se e solo se  $x < -5$  oppure  $x > 0$ . Dunque:



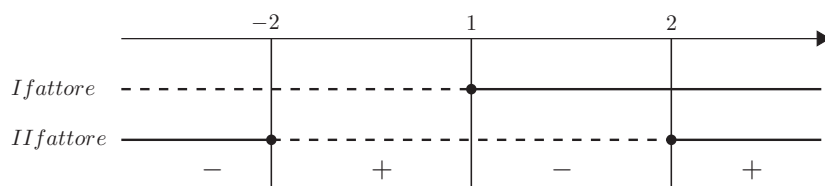
L'insieme delle soluzioni è l'intervallo  $(-5, 0)$ .

**Esempio 1.47** Risolvere la seguente disequazione:

$$(x - 1)(x^2 - 4) > 0.$$

Il procedimento impiegato per la risoluzione delle disequazioni razionali fratte si utilizza per risolvere disequazioni che pongono il problema di studiare il segno di un prodotto di più fattori: si studia separatamente il segno di ciascun fattore, si ricava (con la *regola dei segni*) il segno del loro prodotto e infine si risolve la disequazione.

Il primo fattore è positivo se e solo se  $x - 1 > 0$ , cioè se e solo se  $x > 1$ . Il secondo fattore è positivo se e solo se  $x^2 - 4 > 0$ , cioè se e solo se  $x < -2$  oppure  $x > 2$ . Dunque:



L'insieme delle soluzioni è  $(-2, 1) \cup (2, +\infty)$ .

**Esercizio 12** (sol. pag. 225) Risolvere le seguenti disequazioni razionali fratte:

$$1. \quad \frac{x-1}{x+1} \leq 0$$

$$2. \quad \frac{2x^2-1}{3x+4} \geq 0$$

$$3. \quad \frac{x+1}{x^2-1} > 0$$

$$4. \quad \frac{x^2+6x+5}{x^2+2x} < 0$$

$$5. \quad \frac{x^2+2x-8}{3x^2+7} \geq 0$$

$$6. \quad \frac{x^2+4}{x^2-3x-10} < 0$$

$$7. \quad \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} \geq \frac{3x}{(x-1)(x-2)}$$

$$8. \quad \frac{3x-1}{x+1} + \frac{2x}{x^2-1} < 0$$

**Esercizio 13** (sol. pag. 225) Risolvere le seguenti disequazioni:

$$1. \quad (2x^2+3x)(x^2+7) < 0$$

$$2. \quad (x+5)(x^2-9) \geq 0$$

$$3. \quad (x^2-x-2)(x+3)(x-4) \leq 0$$

$$4. \quad (4-x^2)(x^2-1)x > 0$$

## 1.6 Sistemi di disequazioni

**Esempi.** Risolvere i seguenti sistemi di disequazioni in  $x \in \mathbb{R}$ :

1.48

$$\begin{cases} 4x+3 > 0 \\ x-2 \leq 0 \end{cases}$$

Una *soluzione* di un sistema di disequazioni in una incognita reale è un valore dell'incognita che soddisfa tutte le disequazioni del sistema. Dunque, *per risolvere un sistema di disequazioni*:

▷ *si risolve ciascuna delle disequazioni del sistema;*

▷ *si determina l'intersezione degli insiemi delle soluzioni trovati.*

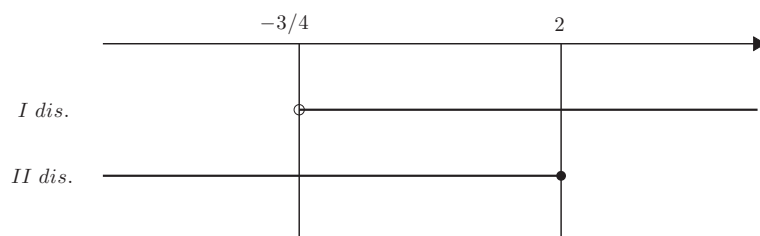
Una conseguenza è che *un sistema di disequazioni non ammette soluzione se anche una sola delle sue disequazioni non ammette soluzione.*

Nell'esempio proposto, si ha:

$$\begin{cases} 4x+3 > 0 \\ x-2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{3}{4} \\ x \leq 2 \end{cases}.$$

Per intersecare i due insiemi delle soluzioni, si può procedere mediante un grafico che riporta i valori “soglia” ( $-3/4$  e  $2$ ) e l'insieme delle soluzioni

per ciascuna disequazione, indicato con una linea continua e/o uno o più punti (pieni). Risolvere il sistema significa considerare solo i valori rappresentati con linea continua e/o punti (pieni) per tutte le disequazioni.



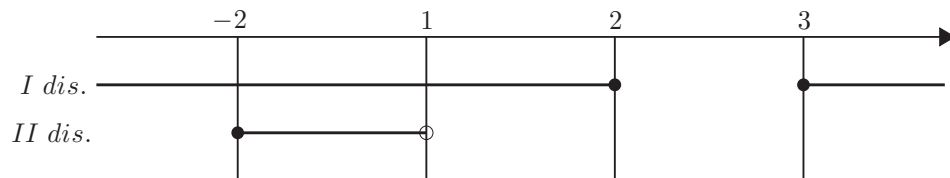
In conclusione, l'insieme delle soluzioni è l'intervallo  $(-3/4, 2]$ .

**1.49**

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 6 \geq 0 \\ \frac{x+2}{1-x} \leq 0 \end{cases}$$

L'equazione associata alla prima disequazione del sistema ha discriminante  $\Delta = 1$  e ammette le due soluzioni  $x_1 = 2$  e  $x_2 = 3$ . Dunque, la prima disequazione è risolta per  $x \leq 2$  e  $x \geq 3$ . La seconda disequazione del sistema è risolta per  $-2 \leq x < 1$ .

Dal seguente grafico ricaviamo la soluzione del sistema:



L'insieme delle soluzioni è quindi l'intervallo  $[-2, 1)$ .

**1.50**

$$\begin{cases} x^2 + x + 6 < 0 \\ \frac{x+3}{1+x^2} \leq 0 \\ x+8 \geq 0 \end{cases}$$

La prima disequazione ha discriminante associato  $\Delta = -23 < 0$ , quindi non ammette soluzione dato che il trinomio di secondo grado associato è positivo  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Dato che la prima disequazione è *impossibile* il sistema nel suo complesso risulta tale, cioè l'insieme delle soluzioni è vuoto.