# Introduzione

Questo volume nasce con l’intento di creare uno strumento didattico efficace in grado di supportare lo studente nel raggiungimento delle competenze richieste per il corso di Matematica Generale.
Il volume è suddiviso in tre macro argomenti: funzioni di una variabile, algebra lineare e funzioni di due variabili.
Per ogni argomento proposto si fa un quadro teorico dei concetti di base, ben strutturato e capace di supportare il pensiero logico matematico relativo alle competente rischieste per l’insegnamento di Matematica Generale, enunciando e dimostrando i principali risultati, senza peró rinunciare agli aspetti operativi bensí proponendo numerosi esercizi specifici che, svolti accuratamente, permettono allo studente di sviluppare e di consolidare le competenze acquisite.
Grazie alla copresenza di teoria ed esercizi, lo studente quindi sarà in grado di applicare e padroneggiare gli strumenti matematici studiati durante il percorso didattico fino a farne un uso consapevole e appropriato nei diversi ambiti applicativi.

# Capitolo 1

# Funzioni di una variabile

## 1.1 Funzioni di una variabile

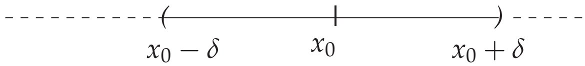
Nel primo capitolo di questo libro si espongono e si applicano le principali nozioni teoriche dell'analisi matematica per le funzioni di una variabile.
Dopo aver introdotto la topologia della retta reale $\Re$, preliminare allo studio di funzioni di una variabile, ne definiamo il campo di esistenza e ne calcoliamo i limiti degli estremi, ne studiamo sia la continuità che la derivabilità per poi introdurre e svilulppare la teoria del calcolo differenziale; infine classifichiamo eventuali punti critici come punti di massimo e/o minimo relativo e/o assoluto della funzione nel suo campo di esistenza e introduciamo le nozioni di concavità e convessità. Alla fine del capitolo, svolgiamo studi completi di una funzione di una variabile e ne disegniamo approssimativamente i grafici sul piano cartesiano.

### 1.1.1 Topologia della retta

Esiste una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei numeri reali $\Re$ e i punti di una retta orientata $r$ detta retta reale. In particolare, identifichiamo ogni sottoinsieme di $\Re$ con un sottoinsieme di punti della retta $r$ ovvero associamo ad un sottoinsieme numerico di $\Re$ un intervallo e parliamo di topologia della retta. Definiamo un intorno completo di un punto generico $x_0 \in \Re$ poi definiamo un intorno circolare di $x_0 \in \Re$ e i vari intorni deducibili da essi.

**Definizione 1** (Intorno completo di un punto $x_0 \in \Re$)**.** *Dato $x_0 \in \Re$ si dice intorno completo di $x_0$ e si indica con $I_{x_0}$ o più semplicemente con $I$, un intervallo $(x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_2)$ con $\delta_1, \delta_2 \in \Re$. Graficamente sulla retta reale $r$, l'intorno completo* *di $x_0$ si rappresente come segue:*


**Definizione 2** (Intorno circolare di un punto $x_0 \in \Re$)**.** *Dato $x_0 \in \Re$ si dice intorno circolare di $x_0$ e si indica con $I_{x_0}$ o più semplicemente con $I$, l'intervallo aperto $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ con $\delta \in \Re$ di centro $x_0$ e raggio $\delta$. Graficamente sulla retta reale $r$, l'intorno circolare del punto $x_0$ si rappresenta come segue:*




Per esempio, l'intorno circolare del punto $x_0 = 5$ di raggio $\delta = 1$ è l'intervallo $(5-1, 5+1) = (4, 6)$. Graficamente:


Osserviamo che data la definizione 2, l'intorno circolare del punto $x_0 \in \Re$ di raggio $\delta \in \Re$ è l'insieme dei punti $x \in \Re$ tali che:

$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \Leftrightarrow -\delta < x - x_0 < \delta \Rightarrow |x - x_0| < \delta$$

Pertanto l'intorno $I_{x_0}$ di raggio $\delta$ possiamo scriverlo analogamente come l'insieme:

$$I_{x_0} = \{x \in \Re : |x - x_0| < \delta\}$$

Prima di proseguire con le nozioni di intorno ricordiamoci come si risolvono le disequazioni con il valore assoluto:

$$|f(x)| \le k \Leftrightarrow -k \le f(x) \le k$$

$$|f(x)| \ge k \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \ge k & \text{se} \quad f(x) \ge 0 \\ f(x) \le -k & \text{se} \quad f(x) < 0 \end{cases}$$

Per esempio, data la disequazione $|x - 5| \ge 1$ risolviamo il sistema equivalente:

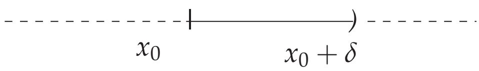
$$\begin{cases} x - 5 \ge 1 & \text{se} \quad x - 5 \ge 0 \\ x - 5 < -1 & \text{se} \quad x - 5 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 6 & \text{se} \quad x \ge 5 \\ x \le 4 & \text{se} \quad x < 5 \end{cases}$$

Mentre per esempio la disequazione $|x - 5| \le 1$ ha come soluzioni $4 \le x \le 6$. Talvolta, come vedremo in seguito, è necessario considerare soltanto una parte di un intorno di un punto $x_0 \in \Re$. Quindi definiamo l'intorno destro e l'intorno sinistro di un punto $x_0$.

**Definizione 3** (Intorno destro e intorno sinistro di $x_0 \in \Re$)**.** *Dato $x_0 \in \Re$ si dice intorno destro di $x_0$ e si indica con $I^+_{x_0}$ o più semplicemente con $I^+$, l'intervallo $(x_0, x_0 + \delta)$ con $\delta \in \Re^+$, ovvero*

$$I^+_{x_0} = \{x \in \Re : x_0 < x < x_0 + \delta\}$$

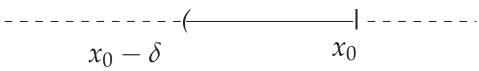
*Graficamente tale intorno equivale a:*




*Analogamente, si dice intorno sinistro di $x_0$ e si indica con $I^-_{x_0}$ o più semplicemente con $I^-$, l'intervallo $(x_0 - \delta, x_0)$ con $\delta \in \Re^+$, ovvero*

$$I^-_{x_0} = \{x \in \Re : x_0 - \delta < x < x_0\}$$

*Graficamente tale intorno equivale a:*




Nella retta reale $r$ abbiamo definito un intorno di un punto $x_0 \in \Re$. Adesso definiamo gli intorni di $\pm\infty$.

**Definizione 4** (Intorno di $\pm\infty$)**.** *Fissato $M \in \Re$ si dice intorno di $+\infty$ l'insieme dei numeri reali $x \in \Re$ tali che $x > M$ ovvero*

$$I_{+\infty} = \{x \in \Re : x > M\}$$

*Fissato $N \in \Re$ si dice intorno di $-\infty$ l'insieme dei numeri reali $x \in \Re$ tali che $x < N$ ovvero*

$$I_{+\infty} = \{x \in \Re : x < N\}.$$

A questo punto siamo in grado di classificare i punti che appartengono alla retta reale ed ad un intervallllo in punti interni, esterni, di frontiera, isolati e di accumulazione e siamo inoltre in grado di descrivere alcune delle loro proprietà.

**Definizione 5** (Punto interno)**.** *Dato $x_0 \in X \subset \Re$, $x_0$ è un punto interno ad $X$ se esiste un intorno $I_{x_0}$ di $x_0$ tutto contenuto in $X$, ovvero $I_{x_0} \subset X$.*

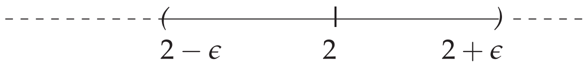
**Osservazione 1.** *Osserviamo che se $x_0$ è punto interno di $X$ per definizione esiste un intorno $I_{x_0}$ di $x_0$ tutto contenuto in $X$, ovvero $I_{x_0} \subset X$ allora il punto $x_0 \in X$.*

**Definizione 6** (Punto esterno). *Dato $x_0 \in X \subset \Re$, $x_0$ è un punto esterno ad $X$ se esiste almeno un intorno $I_{x_0}$ di $x_0$ che non contiene nessun punto di $X$, ovvero $I_{x_0} \cap X = \emptyset$.*

**Definizione 7** (Punto di frontiera). *Sia $x_0 \in X \subset \Re$ è un punto di frontiera per $X$ se ogni intorno $I_{x_0}$ di $x_0$ contiene almeno un elemento di $X$ e almeno un elemento del suo complementare, ovvero*

$$I_{x_0} \cap X \neq \emptyset \qquad e \qquad I_{x_0} \cap X^C \neq \emptyset$$

**Osservazione 2.** *Osserviamo che dato $x_0 \in \Re$ punto di frontiera per l'insieme $X \subset \Re$, dalla definizione deduciamo che $x_0 \in X$ oppure $x_0 \notin X$, ovvero il punto di frontiera può appartenere o no all'insieme stesso. Vediamo un esempio.*
*Dato l'intervallo $I = (2, 3) \subset \Re$ dimostro per esempio, che il punto 2 che non appartiene all'intervallo $I$ è un punto di frontiera per $I$ stesso.*
*Per definizione 2 è un punto di frontiera se dato un arbitrario $\epsilon \in \Re^+$, l'intervallo $J = (-\epsilon + 2, 2 + \epsilon)$ che graficamente corrisponde all'intevallo*




*contiene punti che appartengono ad $I$ ed altri che non appartengono a $I$. In questo caso in particolare vediamo che $(-\epsilon, 2) \not\subseteq I$ e $(2, 2+\epsilon) \subset I$. Pertanto $x_0 = 2$ è un punto di frontiera che non appartiene a $I$. Analogamente (lasciamo al lettore la verifica) di dimostrare che anche il punto 3 è un punto di frontiera per $I$.*

**Definizione 8** (Punto isolato). *Sia $x_0 \in X \subset \Re$ se esiste almeno un intorno $I_{x_0}$ di $x_0$ che non contiene elementi di $X$ eccetto $x_0$ stesso, ovvero $I_{x_0} \cap X = \{x_0\}$.*

**Definizione 9** (Punto di accumulazione). *SIa $x_0 \in X$ è un punto di accumulazione per $X$ se ogni intorno $I_{x_0}$ di $x_0$ contiene almeno un punto $x \in X$ diverso da $x_0$.*

**Lemma 1.** *Dato $x_0 \in X \subset \Re$ valgono le seguenti proprietà:*

*se $x_0$ è un punto isolato allora $x_0$ è un punto di frontiera per $X$*

*i punti interni di $X$ sono punti di accumulazione per $X$*

*i punti di frontiera non isolati di $X$ sono punti di accumulazione per $X$.*

*se $x_0$ è un punto isolato allora non è un punto di accumulazione per $X$ e vale il viceversa.*

Dato $X \subset \Re$ classifichiamo l'insieme in base ai punti che esso contiene e definiamo $X$ insieme aperto e $X$ insieme chiuso.

**Definizione 10** (Insieme aperto)**.** *Sia $X \subset \Re$ si dice che $X$ è un insieme aperto se tutti i suoi punti sono interni.*

**Definizione 11** (Insieme chiuso)**.** *Sia $X \subset \Re$ si dice che $X$ è un insieme chiuso se contiene tutti i suoi punti di accumulazione.*

**Osservazione 3.** *Dato $X \subset \Re$ sappiamo che se $X$ ammette punti di frontiera non isolati questi sono anche punti di accumulazione. Pertanto possiamo stabilire se $X$ è un insieme chiuso considerando i suoi punti di frontiera non isolati che sono anche punti di accumulazione per $X$; se tali punti non appartengono ad $X$ allora possiamo concludere che l'insieme $X$ non è chiuso.*

**Osservazione 4.** *Il complemetare di un insieme aperto è un insieme chiuso e viceversa.*

Dato $X \subset \Re$ definiamo adesso $X$ insieme limitato e $X$ insieme compatto

**Definizione 12** (Insieme limitato)**.** *Sia $X \subset \Re$ si dice che $X$ è un insieme limitato se esiste un intorno $I$ di centro l'origine che lo contiene.*

Il complementare di un insieme limitato si dice illimitato.

**Definizione 13** (Insieme compatto)**.** *Sia $X \subset \Re$ si dice che $X$ è un insieme compatto se $X$ è un insieme chiuso e limitato.*

Dati $a, b \in \Re$ con $a < b$ consideriamo tutti i sottoinsiemi, ovvero gli intervalli, con essi costruibili e descriviamoli uno per uno.

Gli intervalli aperti sono di due tipi: gli intervalli aperto e limitati del tipo $(a, b)$ che graficamente equivalgono a


Gli intervalli aperti e illimitati, del tipo $(-\infty, b)$ e $(a, \infty)$, che graficamente equivalgono a


Gli intervalli chiusi e limitati del tipo $[a, b]$, che graficamente equivalgono a


E gli intervalli chiusi e illimitati del tipo $(-\infty, a]$ e $[b, +\infty)$, che graficamente equivalgono a



Gli intervalli del tipo $[a, b)$ e $(a, b]$ né aperti né chiusi, che graficamente equivalgono a

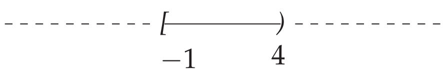


o equivalentemente $(a, b]$ e $[a, b)$. Osserviamo che gli intervalli del tipo $(a, b]$ non sono né aperti né chiusi: il punto $a$ non è punto interno per l'intervallo $[a, b)$ quindi esso non è aperto; inoltre non è chiuso perché non contiene $b$. Analogamente per gli intervalli del tipo $[a, b)$ possiamo affermare che non sono aperti poiché $b$ non ne è punto interno e non sono chiusi perché non contgono il punto $a$.

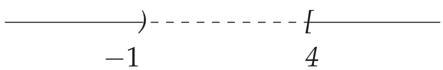
Vediamo alcuni semplici esercizi dove applichiamo le definizioni appena enunciate.

**Esercizio 1.** *Dimostrare che il punto* $x_0 = 4$ *è un punto di frontiera per l'intervallo* $A = [-1, 4)$

*Graficamente l'intervallo* $A$ *è dato da:*




*Il suo complementare* $A^C = (-\infty, -1) \cup [4, +\infty)$ *graficamente è dato da*



*Definiamo l'intorno destro e l'intorno sinistro del punto $x_0 = 4$. Dato $\epsilon > 0$ abbiamo che*

$$I_4^+ = \{x \in \Re : 4 < x \leq 4 + \epsilon\} \qquad e \quad I_4^- = \{x \in \Re : 4 - \epsilon \leq x < 4\}$$

*Osserviamo che $I_4^+ \cap A^C \neq \emptyset$ e $I_4^- \cap A \neq \emptyset$. Pertanto l'intorno completo $I_4$ del punto $x_0 = 4$ contiene almeno un elemento di $A$ e contiene almeno un elemento del suo complementare $A^C$ e possiamo affermare che 4 è un punto di frontiera per l'intervallo $A$.*

**Esercizio 2.** *Descrivere il seguente insieme $A = \{x \in \Re : x^2 \cdot (x - 3) > 0\}$.*

*L'insieme dei punti $x \in \Re$ che verificano la diseguaglianza $x^2 \cdot (x - 3) > 0$ corrisponde all'intervallo $A = \{0\} \cup (3, +\infty)$. I punti interni di $A$ sono $(3, +\infty)$ e i punti di frontiera sono $x = 0$ e $x = 3$. L'intervallo $A$ non è chiuso perché non contiene entrambi i suoi punti interni che sono i suoi punti di frontiera. Inoltre non è aperto perché contiene uno dei suoi punti interni che sono i suoi punti di frontiera.*

**Esercizio 3.** *Descrivere il seguente insieme $A = \{x \in \Re : \dfrac{x+3}{x-4} \leq 0\}$.*

*L'insieme dei punti $x \in \Re$ che verificano la diseguaglianza $\frac{x+3}{x-4} \leq 0$ corrisponde all'intervallo $A = [-3, 4)$:*

- - - - - - - - - - [———) - - - - - - - - - -
$-3$ $4$

*I punti interni di $A$ sono $(-3, 4)$ e i punti di frontiera sono $x = -3$ e $x = 4$. L'intervallo $A$ non è chiuso perché non contiene entrambi i suoi punti interni che sono i suoi punti di frontiera e non è aperto perché contiene uno dei suoi punti interni che sono i suoi punti di frontiera.*

### 1.1.2 Sul concetto di funzione

Il concetto di funzione è legato all'esistenza di una relazione tra due insiemi di elementi in cui gli elementi del secondo insieme dipendono da quelli del primo insieme. In questa sezione si studiano le funzioni che mettono in relazione sottoinsiemi dei numeri reali $\Re$, le cosidette funzioni reali di una variabile reale o piú semplicemente funzioni di una variabile.
Dati due sottoinsiemi $X, Y \subset \Re$ e $f$ una appllicazione $f : X \to Y$ si introducono alcune notazioni fondamentali.
Indichiamo con $x \in X$ il generico valore in ingresso della funzione $f$, detta variabile indipendente, e indichiamo con $y \in Y$ l'unico valore corrispondente ad

$x \in X$, ovvero $y = f(x)$, detta variabile dipendente. Chiamiamo l'insieme $X$ dei valori che può assumere la $x$, ovvero l'insieme dei valori in entrata, dominio della funzione $f$ o insieme di definizione della funzione $f$ o campo di esistenza. Mentre chiamiamo l'insieme $Y$ che contiene i valori $y$ in uscita codominio o immagine della funzione $f$. In simboli,

$$\mathrm{Imm} f = f(A) = \{y \in B : \exists x \in a : f(x) = y\}$$

**Definizione 14** (Funzione di una variabile reale)**.** *Siano $X, Y \subset \Re$ non vuoti, si definisce $f(x)$ una funzione di una variabile reali, una applicazione che associa ad ogni elemento $x \in X$ uno ed un solo elemento $y \in Y$*

$$\begin{aligned} f :& X \subset \Re \to Y \subset \Re \\ & x \in X \to f(x) = y \in Y \end{aligned}$$

*In tal caso $X$ e $Y$ sono detti rispettivamente il dominio o campo di esistenza della funzione $f(x)$ e il codominio della funzione $f(x)$.*

Per esempio $f : \Re \to \Re$ tale che $f(x) = x + 1$ è una funzione che associa ad ogni numero reale $x$ il suo successivo, mentre la funzione $f(x) = x - 1$ è una funzione che associa ad ogni numero reale $x$ il suo precedente.

**Definizione 15** (Grafico di una funzione)**.** *Data $f : X \subset \Re \to Y \subset \Re$, il grafico $G_f$ di $f(x)$ non è altro che l'insieme dei punti del piano cartesiano $Oxy$ di coordinate $(x, y)$ che hanno per ascissa $x \in X$ per ordinata il corrispondente valore $y = f(x)$*

$$G_f = \{(x, y) \in \Re^2 : x \in X, y = f(x)\}$$

Un esempio di grafico:

**Definizione 16** (Funzioni definite a tratti)**.** *Una funzione $f(x)$ si dice definita a tratti se*

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x \in X_1 \\ f_2(x) & x \in X_2 \\ \vdots & \vdots \\ f_n(x) & x \in X_n \end{cases}$$

*dove $f_1 : X_1 \subset \Re \to Y_1 \subset \Re, \cdots, f_n : X_n \subset \Re \to Y_n \subset \Re$ sono funzioni di una variabile reale definite nei loro domini $X_1, \cdots, X_n$.*

Il grafico di una funzione definita a tratti figura 1.2

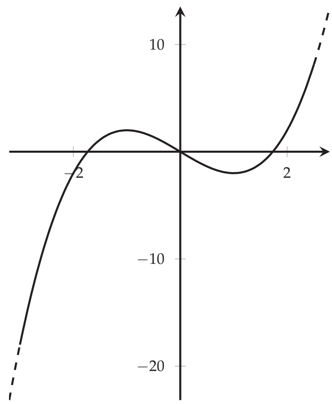
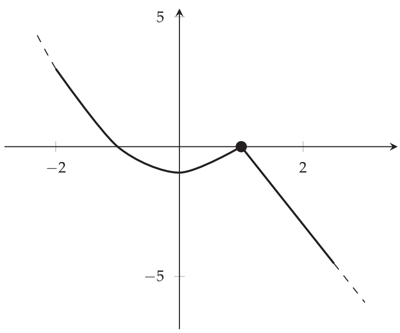



Figura 1.1: Grafico della funzione $f(x) = x^3 - 3x$

**Esercizio 4.** *Descrivere la funzione* $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \leq 1 \\ -3x + 3 & x > 1 \end{cases}$.

*La funzione assegnata è definita a tratti: per* $x \leq 1$ *è una parabola con vertice nel punto* $(0, -1)$ *e passante per il punto* $(-1, 0)$ *mentre per* $x > 1$ *è una retta passante per il punto* $(0, 3)$ *e per il punto* $(1, 0)$.
*Il suo grafico è il seguente:*




**Esercizio 5.** *Descrivere la funzione* $f(x) = \begin{cases} x + 1 & x \leq -1 \\ 1 & -1 < x < 1 \\ -x + 2 & x \geq 1 \end{cases}$.

*La funzione è definita a tratti con la retta* $x + 1$ *per* $x \leq -1$*, la retta costante* $y = 1$ *per* $-1 < x < 1$ *e la retta* $-x + 2$ *per* $x \geq 1$.

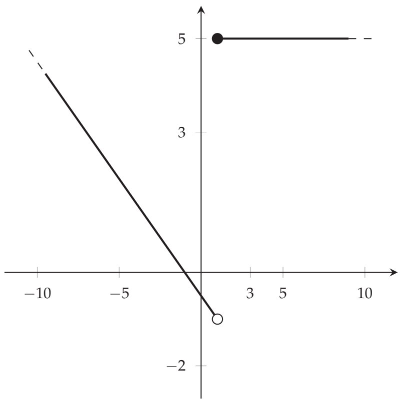
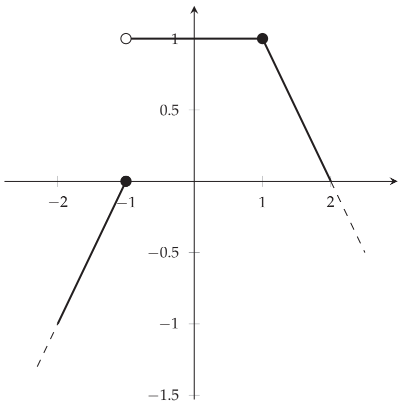



Figura 1.2: Grafico di una funzione definita a tratti

*Il suo grafico è il seguente:*

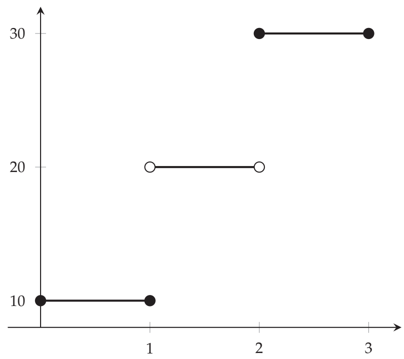



**Esercizio 6.** *Descrivere la funzione*

$$h(x) = \begin{cases} 10 & 0 \leq x \leq 1 \\ 20 & 1 < x < 2 \\ 30 & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

*La funzione $h(x)$ è definita nell'intervallo chiuso e limitato $[0,3]$ ed è la retta $y = 10$ nell'intervallo $[0,1]$, la retta $y = 20$ nell'intervallo $(1,2)$ e la retta $y = 30$ nell'intervallo $[2,3]$. Osserviamo che per il valore $x_0 = 1$ la funzione assume il valore 10 e per esempio per $x_0 = 2$ la funzione assume il valore 30 e cosí via. La funzione non è definita*

*per i valori $x < 0$ e $x > 3$.*
*Il suo grafico è il seguente:*




Per le funzioni definite a tratti è molto importante (e spesso viene sottovalutata ma sarà essenziale nello studio della continuità e della derivabilità delle funzioni di una variabile reale) controllare i valori che la funzione assume nei punti dove si spezza. Vediamo cosa significa fare tale valutazione.

**Esercizio 7.** *Descrivere le funzioni*

$$f(x) = \begin{cases} e^x & 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 - 1 & x > 1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} e^x & 0 \leq x < 1 \\ x^2 - 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

*Le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono funzioni definite a tratti: nell'intervallo $[0, 1]$ entrambe le funzioni sono definite dalla funzione esponenziale $e^x$ mentre nell'intervallo $(1, +\infty)$ sono entrambe definite da una parabola con vertice nel punto $(-1, 0)$ passante per i punti $(\pm 1, 0)$. La differenza tra la funzione $f(x)$ e la funzione $g(x)$ sta nel punto di ascissa $x_0 = 1$ ove la funzione $f(x)$ vale e mentre la funzione $g(x)$ vale $0$.*
*Il grafico delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono rappresentate nei grafici 1.3 e 1.4.*

La funzione valore assoluto $f(x) = |x|$ definita su $\Re$ è un esempio di una funzion a tratti. Infatti per definizione il valore assoluto è :

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

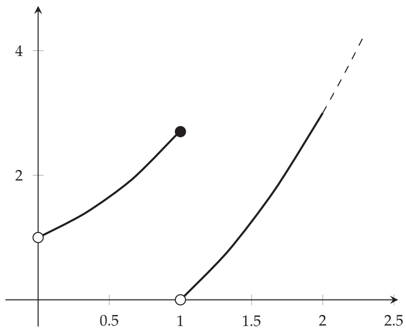



Figura 1.3: Grafico della funzione $f(x)$

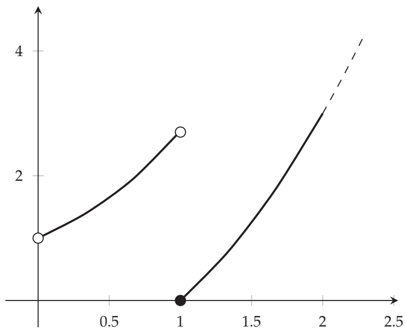
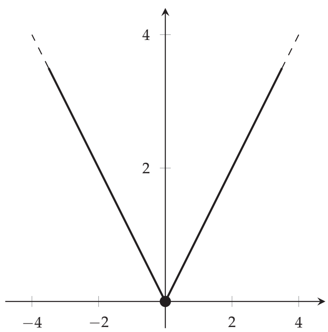



Figura 1.4: Grafico della funzione $g(x)$

La rappresentazione del valore assoluto è in figura seguente.




Facciamo un altro esempio di funzione con il valore assoluto. Per esempio consideriamo la funzione $f(x) = |x - 3|$. Applicando la definizione di valore assoluto abbiamo che

$$|x-3| = \begin{cases} x-3 & \text{se} \quad x \geq 3 \\ -x+3 & \text{se} \quad x < 3 \end{cases}$$

Il grafico della funzione $f(x) = |x-3|$ è nella figura 1.5

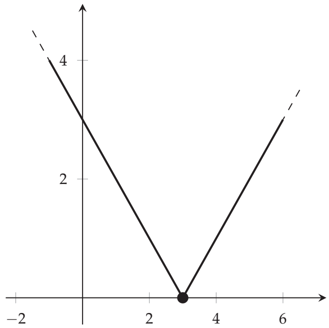


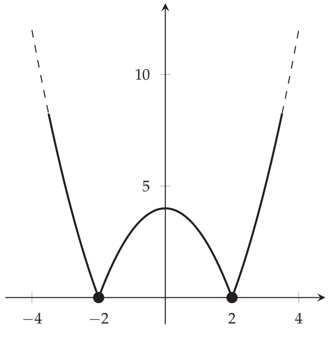

Figura 1.5: Grafico della funzione $f(x) = |x-3|$

**Esercizio 8.** *Descrivere e disegnare la funzione $f(x) = |x^2-4|$.*

*Applicando la definizione di valore assoluto abbiamo che*

$$f(x) = |x^2-4| = \begin{cases} x^2-4 & se \quad x \leq -2 \cup x \geq 2 \\ -x^2+4 & se \quad -2 < x < 2 \end{cases}$$

*Il grafico della funzione $f(x)$ è l'unione del grafico di due parabole, la prima disegnata nell'intervallo $-2 < x < 2$ che ha la concavità rivolta verso il basso con vertice in $(0,4)$ passante per i punto $(\pm 2, 0)$; l'altra disegnata nell'intervallo $x \leq -2 \cup x \geq 2$ con concavità rivolta verso l'alto stesso vertice e stesso passaggio per i punti $(\pm 2, 0)$. Il grafico è rappresentato nella figura seguente.*



**Esercizio 9.** *Descrivere la seguente funzione* $f(x) = e^{|x-1|}$.

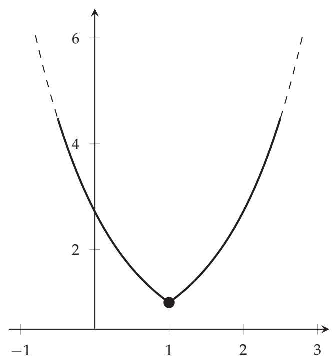
*Il valore assoluto presente all'esponente della funzione è*

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & x \geq 1 \\ -x+1 & x < 1 \end{cases}$$

*Pertanto* $f(x)$ *equivale a:*

$$f(x) = e^{|x-1|} = \begin{cases} e^{x-1} & x \geq 1 \\ e^{-x+1} & x < 1 \end{cases}$$

*Nel punto* $x_0 = 1$ *la funzione* $f(x)$ *vale* 1*. Il grafico della funzione* $f(x) = e^{|x-1|}$ *è rappresentato nella figura seguente.*




**Esercizio 10.** *Descrivere la funzione* $f(x) = \dfrac{x^2+4x-14}{|x-3|+x-2}$.

*Riscriviamo il valore assoluto al denominatore della funzione:*

$$|x-3| = \begin{cases} x-3 & x \geq 3 \\ -x+3 & x < 3 \end{cases}$$

*Pertanto la funzione* $f(x)$ *utilizzando il precedente ragionamento è*

$$f(x) = \frac{x^2+4x-14}{|x-3|+x-2} = \begin{cases} \dfrac{x^2+4x-14}{2x-5} & x \geq 3 \\ \\ x^2+4x-14 & x < 3 \end{cases}$$

A conclusione di questa sezione definiamo funzione crescente e/o decrescente e definiamo il punto di massimo e/o minimo di una funzione di una variabile reale.

**Definizione 17** (Funzione crescente e descrescente). *Data* $f : X \subset \Re \to \Re$, *si dice che*

> $f(x)$*è una funzione crescente se per ogni* $x_1, x_2 \in X$ *si ha che se* $x_1 < x_2$ *allora* $f(x_1) \leq f(x_2)$
>
> $f(x)$ *è una funzione strettamente crescente se per ogni* $x_1, x_2 \in \Re$ *si ha che se* $x_1 < x_2$ *allora* $f(x_1) < f(x_2)$
>
> $f(x)$ *è una funzione drescente se per ogni* $x_1, x_2 \in X$ *si ha che se* $x_1 < x_2$ *allora* $f(x_1) \geq f(x_2)$
>
> $f(x)$ *è una funzione strettamente drescente se si ha che per ogni* $x_1, x_2 \in \Re$ $x_1 < x_2$ *allora* $f(x_1) > f(x_2)$.

**Esercizio 11.** *Data la funzione* $f(x) = \dfrac{1}{x}$ *definita nell'intervallo* $(0, +\infty)$ *dimostrare che ivi è decrescente.*

*La funzione* $f(x)$ *è decrescente infatti, secondo la definizione, dati* $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ *abbiamo che se* $x_1 < x_2$ *vale che* $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$.

**Esercizio 12.** *Data la funzione* $f(x) = x^2$ *definita per* $x \in [0, 1]$ *dimostrare che ivi è crescente.*

*La funzione* $f(x)$ *è crescente infatti, secondo la definizione, per ogni* $x_1, x_2 \in [0, 1]$ *abbiamo che*

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^2 < x_2^2$$

*Tale proprietà è verificata essendo vera per ogni* $x_1$ *e* $x_2$ *numero reale.*

**Esercizio 13.** *Dimostrare che la funzione* $f(x) = x^3$ *è crescente per ogni* $x \in [0, +\infty)$.

*Dati* $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ *abbiamo che*

$$x_1^3 < x_2^3 \Leftrightarrow x_1^3 - x_2^3 < 0 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2) < 0 \Leftrightarrow x_1 < x_2$$

*Tale disequazione è verificata perché l'espressione* $x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2$ *è somma di due quadrati e del prodotto di due numeri positivi.*

Adesso definiamo per una funzione di una variabile reale il punto di massimo e il punto di minimo relativi e/o assoluti.

**Definizione 18** (Punto di massimo relativo e assoluto)**.** *Data* $f : X \subset \Re \to \Re$ *e* $x_0 \in X$. *Si dice che* $x_0$ *è un punto di massimo relativo se esiste un intorno* $I_{x_0}$ *di centro* $x_0$ *tale*

$$f(x) \leq f(x_0) \qquad \forall x \in I_{x_0} \cap X$$

*Inoltre si dice che* $x_0$ *è un punto di massimo assoluto se* $f(x) \leq f(x_0)$ *per ogni* $x \in X$.

**Definizione 19** (Punto di minimo relativo e assoluto)**.** *Data* $f : X \subset \Re \to \Re$ *e* $x_0 \in X$. *Si dice che* $x_0$ *è un punto di mnimo relativo se esiste un intorno* $I_{x_0}$ *di centro* $x_0$ *tale*

$$f(x) \geq f(x_0) \qquad \forall x \in I_{x_0} \cap X$$

*Inoltre si dice che* $x_0$ *è un punto di minimo assoluto se* $f(x) \geq f(x_0)$ *per ogni* $x \in X$.

**Esercizio 14.** *Data la funzione* $f(x) = -x^2 + 20x + 10$ *dimostrare che* $x_0 = 10$ *è punto di massimo assoluto per* $f(x)$ *su* $\Re$.

*Secondo la definizione di punto di massimo assoluto dobbiamo dimostrare che per ogni* $x \in \Re$ *si ha* $f(x_0) \geq f(x)$, *ovvero*

$$\begin{aligned} f(x) \leq f(x_0) &\Leftrightarrow -x^2 + 20x + 10 \leq 110 \\ &\Leftrightarrow -x^2 + 20x - 100 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 20x + 100 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 10)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

*Tale disequazione è verificata per ogni* $x \in \Re$.

**Esercizio 15.** *Data la funzione* $f(x) = x(x+1)^2 + 2$ *dimostrare che* $x_0 = -1$ *è punto di massimo relativo ma non assoluto per* $f(x)$ *su* $\Re$.

*Consideriamo la disequazione:*

$$\begin{aligned} f(x) \leq f(x_0) &\Leftrightarrow x(x+1)^2 + 2 \leq 2 \\ &\Leftrightarrow x(x+1)^2 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow x \leq 0 \end{aligned}$$

*Tale disequazione è verificata per* $x \leq 0$ *pertanto* $x_0 = -1$ *è un punto di massimo relativo perché esiste un intorno* $I_{-1}$ *di centro* $x_0 = -1$ *e raggio* $\delta > 0$ *per cui la disequazione* $f(x) \leq f(-1)$ *é verificata; ma non è un punto di massimo assoluto perché tale disequazione non vale per ogni* $x \in \Re$.

In quest'ultime righe di questa sezione, diamo la definizione di parit à e di disparità di una funzione di una variabile.

**Definizione 20** (Funzione pari e funzione dispari)**.** *Una funzione $f : X \subset \Re \to \Re$ si dice pari se*

$$f(-x) = f(x) \quad \forall x \in \Re$$

*Si dice dispari se*

$$f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in \Re$$

*Graficamente una funzione pari assume valori simmetrici rispetto all'asse delle ordinate mentre una funzione dispari assume valori simmetrici rispetto all'origine.*

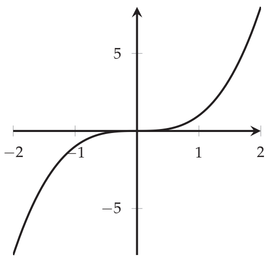



Figura 1.6: Grafico di una funzione $f(x)$ dispari

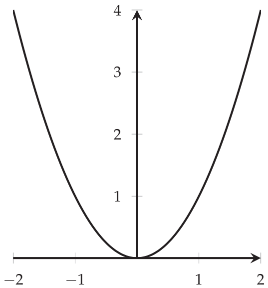



Figura 1.7: Grafico di una funzione $f(x)$ pari

**Esercizio 16.** *Date le funzioni*

$$f(x) = -x^4 + x^2 \qquad g(x) = -x^3 + x \qquad h(x) = x^2 - x$$

*Dimostrare che $f(x)$ è pari, $g(x)$ è dispari e $h(x)$ non è né pari né dispari.*

*Verifichiamo che $f(x)$ è pari applicando la definizione:*

$$f(-x) = -(-x)^4 + (-x)^2 = -x^4 + x^2 = f(x)$$

*Verifichiamo che $f(x)$ è dispari applicando la definizione:*

$$g(-x) = -(-x)^3 + (-x) = -(-x^3) - x = -(-x^3 + x) = -g(x)$$

*Per la funzione $h(x)$ vediamo che*

$$\begin{aligned} h(-x) &= x^2 + x \neq h(x) \\ h(-x) &= x^2 + x \neq -h(x) = -x^2 + x \end{aligned}$$

*Pertanto $h(x)$ non è né pari né dispari.*

### 1.1.3 Campo di esistenza e operazioni tra funzioni

Data una funzione di una variabile reale $f : X \to Y$, chiamiamo l'insieme $E_f$ dei valori che puó assumere la $x$, ovvero il dominio, l'insieme di definizione o il campo di esistenza per la funzione $f(x)$.
In questa sezione descriviamo dapprima i campi di esistenza delle funzioni di una variabile note poi le operazioni tra funzioni, in particolare le funzioni somma, prodotto, quoziente e composizione.

**Lemma 2.** *Date due funzioni di una variabile reale , $f, g : \Re \to \Re$ e detti $E_f$ e $E_g$ rispettivamente i campi di esistenza di $f(x)$ e $g(x)$, si ha che:*

*il campo di esistenza della funzione somma, ovvero $f(x) + g(x)$, è l'insieme dei punti $x \in E_f \cap E_g$*

*il campo di esistenza della funzione differenza, ovverlo $f(x) - g(x)$, è l'insieme dei punti $x \in E_f \cap E_g$*

*il campo di esistenza della funzione prodotto, ovvero $f(x) \cdot g(x)$, è l'insieme dei punti $x \in E_f \cap E_g$*

*il campo di esistenza della funzione quoziente, ovvero $\frac{f(x)}{g(x)}$, è l'insieme dei punti $x \in E_f$ e $x \in E_g : g(x) \neq 0$*

*il campo di esistenza della funzione prodotto di composizione, ovvero $g(f(x))$ è l'insieme dei punti $x \in E_f$ tali per cui $f(x) \in E_g$.*