

P. De Angelis, R. De Marchis
M. Marino, A.L. Martire

Lezioni di matematica finanziaria



TERZA EDIZIONE



Giappichelli

Prefazione

A quasi cinque anni dalla prima edizione, questa terza e revisionata, nasce dall'esigenza di raccogliere anche i suggerimenti degli studenti raccolti nel corso delle lezioni.

Il piano dell'opera, in alcune parti rivisto nella struttura, è frutto dell'esperienza didattica pluriennale nell'insegnamento della Matematica Finanziaria da parte dei Proff. Paolo De Angelis, Roberto De Marchis, Mario Marino e Antonio Luciano Martire, presso la Facoltà di Economia della Sapienza Università di Roma.

Una importante annotazione per gli studenti: la soluzione e dunque i risultati degli esempi e degli esercizi proposti dipende in maniera rilevante dal numero di decimali nelle diverse operazioni di calcolo; la diminuzione del numero di decimali comporta risultati diversi per eccesso o per difetto rispetto a quelli esposti nel testo e ottenuti attraverso l'ausilio di fogli di calcolo elettronici. Il testo, scritto interamente in \LaTeX , si pone anche come utile compendio didattico di facile utilizzo per gli studenti della Facoltà di Economia.

Gli Autori

Roma, febbraio 2024

Capitolo 1

Le operazioni finanziarie

1.1 Introduzione alle operazioni finanziarie

La matematica finanziaria identifica l'ambito della matematica applicata dedicata allo studio, alla modellizzazione e alla valutazione delle operazioni finanziarie.

Partendo da un'adeguata conoscenza dei principali strumenti matematici, lo step iniziale di analisi è quello di definire e comprendere le operazioni finanziarie.

In generale, per **operazione finanziaria** intendiamo ogni tipo di accordo che produce una variazione di capitale per effetto dello scambio di importi monetari esigibili in istanti di tempo diversi.

Gli elementi chiave che delineano una generica operazione finanziaria sono:

- *lo scambio di importi monetari*: un'operazione finanziaria nasce nel momento in cui sussiste almeno uno scambio di importi monetari, il cui valore sia definito secondo una medesima unità monetaria di misura (valuta);
- *il differimento temporale degli importi monetari*: gli importi monetari oggetto di scambio sono esigibili in istanti di tempo diversi e il loro confronto potrà avvenire correttamente solo se tali importi fossero riferiti ad una medesima epoca. Questo significa che il valore degli importi monetari non rimane immutato al trascorrere del tempo, ma subisce una variazione per effetto del “prezzo” del tempo sul denaro.

Per fissare questi concetti primari, poniamo di seguito un semplice esempio. Consideriamo due individui, Tizio e Caio. Tizio è un individuo parsimonioso e dispone di un risparmio monetario, mentre Caio ha l'esigenza di reperire

denaro. Tizio decide di prestare a Caio una somma pari a 1000 euro, che quest'ultimo si impegna a restituire in un'unica soluzione tra un anno. I due individui hanno posto in essere un'operazione finanziaria: si ha uno scambio di importi temporalmente differiti. Questa operazione può essere analizzata sotto due punti di vista:

- nell'ottica di Tizio, è stato sostenuto un esborso monetario iniziale di 1000 euro per ricevere un importo futuro (incasso del credito) esigibile tra 1 anno;
- nell'ottica di Caio, è stato conseguito un introito di 1000 euro a fronte dell'impegno di corrispondere un importo futuro (restituzione del debito) tra 1 anno.

In tale scambio, Tizio perde la disponibilità monetaria di 1000 euro per un anno (oltre a correre il rischio di mancata restituzione). Pertanto, in quanto soggetto razionale, egli chiederà a Caio un importo monetario aggiuntivo rispetto al denaro inizialmente prestato: si forma in tal modo una ricompensa che misura il *valore temporale del denaro*, il c.d. *interesse*.

Considerando il valore temporale del denaro, i 1000 euro disponibili oggi non sono confrontabili direttamente con i 1000 euro disponibili tra un anno: i 1000 euro disponibili oggi saranno confrontabili, in quanto *equivalenti*, solo ai 1000 euro accresciuti degli interessi relativi all'anno trascorso.

La matematica finanziaria interviene nell'operazione di scambio formalizzando le leggi matematiche con le quali misurare il valore temporale degli importi, rendendoli confrontabili ed equivalenti, purché il confronto sia definito rispetto ad un medesimo istante temporale.

L'esempio esposto, seppur banale, è idoneo a rappresentare diverse situazioni della realtà economica quotidiana. Ad esempio, possiamo pensare a Tizio come un istituto di credito che concede un prestito finanziario al cliente Caio; ancora, Tizio è un investitore che impiega il proprio risparmio in un titolo obbligazionario, che non paga cedole, emesso da Caio; e molte altre.

Operativamente, le operazioni finanziarie sono accordi compiuti all'interno del c.d. *mercato dei capitali*, quale luogo atto alla negoziazione tra operatori economici che offrono e altri che domandano capitali.

Nel mercato dei capitali, le due principali categorie di operatori economici sono dette prenditori di fondi e prestatori di fondi. I primi sono coloro che hanno l'esigenza di reperire disponibilità monetarie, ovvero versano in una situazione di deficit di ricchezza, e pertanto domandano denaro nel mercato; i secondi, per contro, sono coloro che dispongono di un surplus di ricchezza e sono disponibili ad impiegare il loro denaro in eccesso offrendolo nel mercato.

Il trasferimento di ricchezza da operatori in surplus a operatori in deficit avviene per mezzo di diversi strumenti di carattere finanziario. Tra i tanti strumenti finanziari negoziabili, particolare menzione è data ai titoli finanziari: essi sono contratti che garantiscono al possessore il diritto, negoziabile in appositi segmenti del mercato di capitali, di ricevere introiti futuri. Casi esemplificativi e comuni di titoli finanziari sono le azioni, negoziate all'interno del mercato azionario, le obbligazioni, negoziate all'interno del mercato obbligazionario, e gli strumenti monetari, negoziati all'interno del mercato monetario.

Nella sostanza, gli strumenti finanziari si presentano a tutti gli effetti come operazioni finanziarie e, in quanto tali, analizzati per mezzo della matematica finanziaria.

Passiamo ora ad esporre una definizione formale di operazione finanziaria. Indichiamo con:

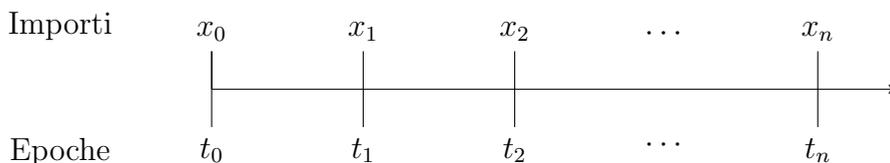
- $\underline{x} = \{x_0; x_1; \dots; x_n\}$ il vettore degli importi monetari;
- $\underline{t} = \{t_0; t_1; \dots; t_n\}$ il vettore delle epoche di esigibilità degli importi monetari. Tale vettore definisce lo scadenziario temporale dell'operazione finanziaria, in cui poniamo che $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$ e $1 < n < \infty$.

Denoteremo una generica operazione finanziaria come una coppia di vettori $\underline{x}/\underline{t}$ a componenti reali:

$$\underline{x}/\underline{t} = \{x_0; \dots; x_n\} / \{t_0; \dots; t_n\} = \{(x_0; t_0); \dots; (x_n; t_n)\} \quad (1.1)$$

in modo tale che l'operazione finanziaria sia espressa come una successione di importi e delle rispettive epoche di esigibilità: ogni k -esima componente della coppia $\underline{x}/\underline{t}$ è letta come “importo monetario x_k esigibile all'epoca t_k ”, per $k = 0, \dots, n$.

Ad ogni operazione finanziaria è possibile associare un'illustrazione grafica, detta *diagramma importi-epoche*:



Interpretiamo l'epoca t_0 come l'istante iniziale dell'operazione finanziaria, mentre con t_n indicheremo l'istante finale o scadenza. La differenza $(t_n - t_0)$ restituisce l'intera durata dell'operazione finanziaria.

Dal punto di vista della variabile “tempo”, si deve tener conto anche dell’epoca rispetto alla quale avviene la valutazione degli importi costituenti l’operazione finanziaria. L’epoca di valutazione potrà coincidere con l’epoca iniziale, con l’epoca finale o potrà essere un qualsiasi istante di tempo $t \in (t_0; t_n)$, nonché un istante di tempo $t > t_n$. Al variare dell’epoca di valutazione varierà il valore temporale attribuibile a ciascun importo monetario, al fine di mantenere l’equivalenza tra i diversi importi.

Per concludere, è utile precisare che le componenti dell’operazione finanziaria, ovvero gli importi monetari e le epoche, costituiscono le *grandezze fondamentali* della matematica finanziaria. Tutte le altre grandezze che incontreremo nel proseguo sono da considerarsi come derivate¹.

1.2 Tipologie di operazioni finanziarie

La definizione formale di operazione finanziaria data nel precedente paragrafo può essere specificata a seconda delle caratteristiche degli elementi della coppia $\underline{x}/\underline{t}$.

In particolare, possiamo delineare una classificazione delle diverse tipologie di operazioni finanziarie.

Innanzitutto, facendo riferimento al numero di importi/epoche della successione², si è soliti distinguere tra *operazioni finanziarie elementari e complesse*. Le prime riguardano lo scambio di due soli importi differiti nel tempo e, pertanto, la loro configurazione vettoriale è del tipo:

$$\underline{x}/\underline{t} = \{x_0; x_n\} / \{t_0; t_n\} = \{(x_0; t_0); (x_n; t_n)\}. \quad (1.2)$$

Diversamente, le operazioni finanziarie complesse sono costituite dallo scambio di più di due importi e la relativa rappresentazione vettoriale rimane la medesima data dalla (1.1).

Esempio 1.2.1 (Operazioni finanziarie semplici e complesse). *Un’operazione elementare è del tipo:*

$$\underline{x}/\underline{t} = \{30; 100\} / \{0; 1\} = \{(30; 0); (100; 1)\}.$$

Tale operazione consiste nella disponibilità di un importo pari a 30 euro al tempo 0 (istante iniziale), a cui corrisponde un importo pari a 100 euro tra un periodo (ad esempio un anno).

¹Sono grandezze finanziarie derivate il flusso = $\frac{\text{importo}}{\text{tempo}}$ e l’intensità = $\frac{\text{flusso}}{\text{importo}}$.

²Facciamo formalmente riferimento alla dimensione dei vettori $\underline{x}/\underline{t}$.

Diversamente, un'operazione complessa è del tipo:

$$\underline{x}/\underline{t} = \{10; -20; 500\} / \{0; 1; 3\} = \{(10; 0); (-20; 1); (500; 3)\}.$$

In questo caso l'operazione è complessa in quanto composta da più di due importi esigibili su istanti di tempo diversi.

Un'ulteriore classificazione è ottenibile prendendo a riferimento la successione dei segni degli importi monetari. Nello specifico, si distingue tra *operazioni finanziarie di investimento*, nelle quali gli esborsi monetari precedono le entrate, e *operazioni finanziarie di finanziamento*, nelle quali le entrate precedono gli esborsi.

Esempio 1.2.2 (Operazioni di investimento e di finanziamento). *Un'operazione finanziaria del tipo:*

$$\underline{x}/\underline{t} = \{-1400; 800; 1000\} / \{0; 1; 2\} = \{(-1400; 0); (800; 1); (1000; 2)\}$$

configura un investimento dato dall'impiego al tempo 0 di 1400 euro, al fine di ottenere degli importi monetari in entrata nelle epoche future. Questa operazione può rappresentare allo stesso tempo un'operazione di finanziamento se vista nell'ottica della controparte dell'investitore:

$$\underline{x}/\underline{t} = \{1400; -800; -1000\} / \{0; 1; 2\} = \{(1400; 0); (-800; 1); (-1000; 2)\}.$$

ovvero la controparte riceverà inizialmente un'entrata di 1400 euro a fronte della quale corrisponderà ai tempi futuri gli importi di 800 e 1000 euro.

Un'altra importante distinzione è tra *operazioni finanziarie certe* e *operazioni finanziarie aleatorie*. L'operazione finanziaria può dirsi certa se importi ed epoche sono definiti a priori in quanto deterministici; per contro, un'operazione è aleatoria se almeno un importo monetario o un'epoca (o entrambi) non sono certi. In questo caso lo schema formale dell'operazione finanziaria acquisisce due nuovi vettori, chiamati rispettivamente \underline{E} e \underline{P} :

- $\underline{E} = \{E_0; E_1; \dots; E_n\}$ ha per elementi i c.d. "eventi". Un evento è una circostanza non determinabile a priori che può produrre effetti tanto sugli importi quanto sulle epoche dell'operazione finanziaria;
- $\underline{P} = \{P_0; P_1; \dots; P_n\}$ è il vettore della *probabilità* con cui gli eventi possono verificarsi.

Nelle operazioni finanziarie aleatorie, gli elementi dei vettori \underline{x} e \underline{t} non sono più deterministici, bensì delle *variabili aleatorie*: ogni elemento k -esimo potrà assumere diversi possibili valori a seconda dell'evento che si realizzerà, tenuto conto della probabilità di verificarsi.

Esempio 1.2.3 (Operazioni finanziarie aleatorie e certe). *Si consideri il caso di una banca che concede 10000 euro di finanziamento ad un cliente, con l'obbligo di quest'ultimo di restituire tra un anno l'importo di 12000 euro. La banca non è certa che il proprio cliente sia solvibile, per cui ipotizza due possibili eventi: Default, D , e No Default, ND . Tali eventi hanno rispettivamente probabilità 5% e 95% di verificarsi. Dunque, si identificano i seguenti due vettori:*

$$\underline{E} = \{E_0 = D, E_1 = ND\} ; \underline{P} = \{P_0 = 5\%; P_1 = 95\%\}.$$

Se si verifica l'evento "No Default" allora la banca incasserà 12000 euro alla fine dell'anno, mentre se si verificherà l'evento di "Default" la banca non incasserà alcun importo.

Dal punto di vista della banca, abbiamo un'operazione finanziaria elementare, d'investimento e aleatoria:

$$\underline{x}/\underline{t} = \left\{ -10000; \tilde{Y} \right\} / \{0; 1\}$$

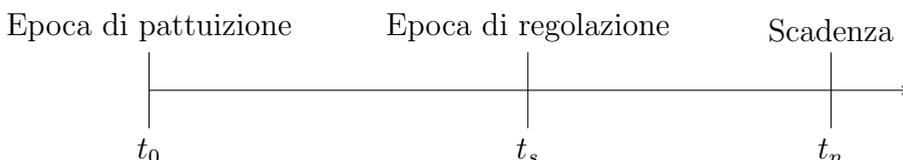
dove \tilde{Y} è la variabile aleatoria che rappresenta l'importo incerto che la banca incasserà a seconda del "credit event" che si verificherà:

$$\tilde{Y} = \begin{cases} 12000 & \text{con probabilità del 95\%} \\ 0 & \text{con probabilità del 5\%} \end{cases}$$

Nel caso di un'operazione finanziaria certa, \tilde{Y} avrebbe assunto uno ed un solo valore con certezza (probabilità del 100%), ovvero non sarebbe una variabile aleatoria, bensì deterministica.

Maggior dettaglio sulle operazioni finanziarie aleatorie verrà dato nel Capitolo 8. Nel proseguo ci limiteremo ad esporre gli strumenti fondamentali della matematica finanziaria facendo riferimento alle sole operazioni finanziarie certe.

Una classificazione aggiuntiva ci porta a discernere tra le *operazioni finanziarie a pronti o spot* e le *operazioni finanziarie a termine o forward*. La diversità tra le due operazioni risiede nella possibilità che possa esistere un differimento temporale tra l'epoca rispetto alla quale iniziano ad essere scambiati gli importi e quella nella quale tali scambi sono pattuiti dalle parti dell'accordo. Tecnicamente, la distinzione in esame poggia sul seguente schema:



Nelle operazioni a pronti l'epoca di pattuizione e di regolazione coincidono, motivo per cui la successione di importi \underline{x} inizia a svilupparsi a partire dall'epoca t_0 e si ha che $t_s = t_0$. Nel caso delle operazioni a termine, le parti concorderanno gli scambi di importi all'epoca t_0 , ma tali importi inizieranno ad essere effettivamente scambiati a partire dall'epoca s fino all'epoca t_n : l'intero accordo tra le parti ha durata $(t_n - t_0)$, ma l'operazione finanziaria di scambio avrà durata $(t_n - t_s)$.

Esempio 1.2.4 (Operazioni finanziarie spot e forward). *Un'operazione finanziaria spot è del tipo*

$$\underline{x}/\underline{t} = \{-1400; 800; 1000\} / \{0; 1; 2\} = \{(-1400; 0); (800; 1); (1000; 2)\}$$

poiché al tempo $t_0 = 0$ osserviamo sia la pattuizione che l'inizio dello scambio degli importi. Tale operazione finanziaria sarebbe a termine se, ad esempio, gli importi iniziassero ad essere esigibili a partire da un'epoca successiva, $t_s = 1$, e la pattuizione di questi avvenisse all'epoca $t_0 = 0$:

$$\underline{x}/\underline{t} = \{-1400; 800; 1000\} / \{1; 2; 3\} = \{(-1400; 1); (800; 2); (1000; 3)\}.$$

Avremo modo di riprendere questi due tipi di operazione finanziarie nel Capitolo 6, quando parleremo della struttura per scadenza dei tassi d'interesse. Fino ad allora, considereremo il solo caso delle operazioni finanziarie a pronti. Le operazioni finanziarie possono, inoltre, derivare dall'unione o dalla scomposizione di altre operazioni finanziarie. In particolare, definiamo:

- *L'operazione finanziaria somma.*

Consideriamo due operazioni finanziarie $\underline{x}'/\underline{t}'$ e $\underline{x}''/\underline{t}''$. L'operazione finanziaria somma, $\underline{x}/\underline{t}$, è ottenuta operando l'unione insiemistica dei due scadenziari, \underline{t}' e \underline{t}'' , ridefinendo i vettori \underline{x}' e \underline{x}'' sul nuovo scadenziario unione e, infine, sommando algebricamente i pagamenti esigibili alle diverse date.

- *La scomposizione di operazioni finanziarie.*

Data un'operazione finanziaria $\underline{x}/\underline{t}$, la sua scomposizione consiste nella scissione in due o più operazioni finanziarie.

Esempio 1.2.5 (Somma e scomposizione di operazioni finanziarie). *Siano date due operazioni finanziarie:*

$$\underline{x}'/\underline{t}' = \{5; -10; 15\} / \{1; 3; 4\}$$

e

$$\underline{\mathbf{x}}''/\underline{\mathbf{t}}'' = \{-20; 30; 30\} / \{0; 1; 2\}.$$

L'operazione finanziaria somma, $\underline{\mathbf{x}}/\underline{\mathbf{t}}$, si ottiene computando l'unione insiemistica degli scadenziari di partenza:

$$\underline{\mathbf{t}} = \underline{\mathbf{t}}' \cup \underline{\mathbf{t}}'' = \{1; 3; 4\} \cup \{0; 1; 2\} = \{0; 1; 2; 3; 4\}$$

e, successivamente, ridefinendo i vettori $\underline{\mathbf{x}}'$ e $\underline{\mathbf{x}}''$ sul nuovo scadenziario temporale:

$$\underline{\mathbf{x}}'/\underline{\mathbf{t}} = \{0; 5; 0; -10; 15\} / \{0; 1; 2; 3; 4\}$$

e

$$\underline{\mathbf{x}}''/\underline{\mathbf{t}} = \{-20; 30; 30; 0; 0\} / \{0; 1; 2; 3; 4\}.$$

Infine, la somma algebrica degli importi di $\underline{\mathbf{x}}'$ e $\underline{\mathbf{x}}''$ esigibili sulle medesime date porta alla forma finale dell'operazione somma:

$$\underline{\mathbf{x}}/\underline{\mathbf{t}} = \{-20; 35; 30; -10; 15\} / \{0; 1; 2; 3; 4\}.$$

A partire da questa operazione, potremmo poi farne una scomposizione. Ad esempio, potremmo suddividerla in due operazioni finanziarie, una i cui importi abbiano segno positivo (solo entrate) e una i cui importi abbiano segno negativo (solo uscite):

$$\underline{\mathbf{w}}/\underline{\mathbf{t}} = \{0; 35; 30; 0; 0\} / \{0; 1; 2; 3; 4\}$$

e

$$\underline{\mathbf{y}}/\underline{\mathbf{t}} = \{-20; 0; 0; -10; 0\} / \{0; 1; 2; 3; 4\}.$$

La somma e la scomposizione delle operazioni finanziarie sono utili per la rappresentazione della successione di importi nel tempo dei c.d. *portafogli finanziari*, quali composizioni di singole operazioni finanziarie: mediante la somma riusciamo a costruire il portafoglio finanziario e rappresentarlo per mezzo di un unico flusso di importi sullo scadenziario comune; mediante la scomposizione siamo in grado di discernere, in relazione al medesimo portafoglio, il complesso dei flussi in entrata e quelli in uscita con le rispettive epoche. Nell'esempio 1.2.5, l'operazione finanziaria $\underline{\mathbf{x}}/\underline{\mathbf{t}}$ configura gli importi generati da un portafoglio finanziario costituito dalle operazioni finanziarie $\underline{\mathbf{x}}'/\underline{\mathbf{t}}'$ e $\underline{\mathbf{x}}''/\underline{\mathbf{t}}''$; dal portafoglio $\underline{\mathbf{x}}/\underline{\mathbf{t}}$ possiamo poi identificare una configurazione di tipo *asset-liability*, separando le componenti di solo attivo, $\underline{\mathbf{w}}/\underline{\mathbf{t}}$, da quelle passive, $\underline{\mathbf{y}}/\underline{\mathbf{t}}$.