Prefazione

Questo è il primo libro di una collana di due volumi di Matematica Generale, in cui trattiamo i tradizionali argomenti presentati in un corso di laurea in Economia in modo non tradizionale, aggiungendo tanti complementi di teoria nonché una quantità inusuale di esempi, figure ed esercizi.

I due volumi della collana sono così strutturati:

Volume I: logica elementare, insiemistica, calcolo combinatorio, topologia dei numeri reali, algebra vettoriale e matriciale, sistemi lineari, rette nel piano e strutture algebriche, nonché un'appendice per i richiami di algebra elementare e di trigonometria;

Volume II: successioni, serie, funzioni reali di una variabile reale, limiti, continuità, derivabilità, teoremi del calcolo differenziale, studio di funzioni, integrali indefiniti e definiti, equazioni differenziali e applicazioni economiche, nonché un'appendice per le disequazioni.

Il Volume I elabora e completa, modificandolo in modo sostanziale, il seguente libro:

> [GA2017] Alfio Giarlotta e Silvia Angilella.
> *Matematica Generale. Teoria e Pratica con Esercizi a Scelta Multipla. Volume I.*
> Seconda edizione, Giappichelli 2017.

Ringraziamo Silvia Angilella per averci permesso di utilizzare la struttura portante del suddetto libro [GA2017] ai fini della stesura di questo primo volume.

I due volumi di questa collana costituiscono un tentativo di abbinare la teoria e la pratica della Matematica Generale in un connubio inscindibile. Infatti, un notevole numero di esempi accompagna ciascuna nozione teorica introdotta e, viceversa, i tanti esercizi (svolti e non svolti) costituiscono spesso un'occasione per presentare in un modo diverso alcuni aspetti della teoria. Lo tipologia degli esercizi è diversa da quella classica, in quanto utilizziamo la struttura dei quesiti a risposta multipla. La *ratio* di tale scelta è che reputiamo lo schema a risposta multipla didatticamente più idoneo a testare l'apprendimento dei tanti concetti, nozioni e metodologie introdotti.

Altrettanto inusuale è la quantità di figure che accompagnano la presentazione della teoria e la risoluzione degli esercizi. Riteniamo che l'approccio grafico possa risultare di notevole aiuto agli studenti nella comprensione di alcuni concetti, soprattutto quelli astratti.

Un'ulteriore caratteristica non convenzionale di questi due libri è l'ubiquo uso di svariati colori. Nel tentativo di rendere i tanti concetti/risultati/esempi/definizioni ivi presentati più facilmente fruibili, abbiamo attributo un significato a ciascun colore, utilizzato in relazione alla natura dei contenuti che enfatizza. Precisamente, utilizzeremo i seguenti colori con la seguente semantica:

- **magenta** per definizioni, notazioni e quesiti;
- **azzurro** per teoremi, proposizioni, corollari, lemmi e algoritmi;
- **verde** per esempi ed esercizi risolti;
- **violetto** per esercizi non risolti;
- **blu** per i nomi dei matematici (e scienziati) di cui nei richiami bibliografici.

(Tuttavia, nelle figure useremo liberamente i colori, senza alcuna semantica predeterminata.)

I **destinatari** naturali dei due libri di questa collana sono gli studenti universitari impegnati nel conseguimento di una laurea che richieda una formazione matematica propedeutica all'apprendimento di altre discipline. In particolare, alcuni argomenti ed esercizi sono strutturati *ad hoc* per gli studenti di corsi di laurea in discipline economiche.

Tuttavia, nonostante l'organizzazione di questi volumi sia ispirata ad obiettivi didattici, il lettore potenziale non appartiene necessariamente alla categoria degli studenti che aspirino esclusivamente al superamento dell'esame di Matematica Generale. Invero, questi due testi sono teoricamente utilizzabili anche da chi desideri ottenere una panoramica, ancorché generica ed incompleta, sulle modalità di formalizzazione simbolica di alcuni concetti astratti aventi natura quantitativa.

Lo **scopo** auspicato di questi volumi è principalmente quello di fornire al lettore un ausilio alla preparazione da due punti di vista complementari e sinergici:

- *preparazione teorica* per il superamento della prova orale di Matematica Generale, mediante la presentazione schematica degli argomenti di teoria nonché di alcune nozioni complementari;
- *preparazione pratica* per il superamento della prova scritta di Matematica Generale, mediante la presentazione e lo svolgimento di quesiti a scelta multipla relativi ai vari argomenti di teoria.

Un terzo obiettivo – forse più recondito ma a nostro avviso tutt'altro che ultroneo – è quello di fornire al lettore un *modus cogitandi* alternativo, utile nell'interpretazione di concetti e nella soluzione di problemi che richiedano un approccio sistematico ed una forma simbolica di pensiero. A tal fine abbiamo tentato di organizzare la trattazione come un *corpus* di conoscenze omogeneo ed articolato al tempo stesso, enfatizzando le connessioni tra i tanti concetti presentati, che, ove possibile, sono stati collocati in un contesto (matematico e non) più ampio, al fine di evidenziarne la portata generale. Talvolta abbiamo anche inserito alcuni brevi riferimenti storici nella trattazione di alcuni argomenti (soprattutto nelle note a piè di pagina),[1] nella conclamata convinzione che la conoscenza della genesi e dell'evoluzione dei concetti matematici possa costituire un ausilio alla comprensione delle loro modalità di formalizzazione.

Nel perseguimento di un obiettivo di integrazione reciproca tra teoria e pratica, abbiamo arricchito l'esposizione con inusuali spiegazioni relative alla *ratio* per cui ed al *modus* in cui alcuni concetti matematici vengono rappresentati mediante determinate nozioni espresse in linguaggio simbolico, nella malcelata speranza che ciò possa rendere meno criptica – e, si spera, più piacevole – una materia tradizionalmente ostica. Inoltre, limitatamente agli argomenti che si prestano per la loro stessa natura a degli approfondimenti non eccessivamente tecnici – quali insiemistica, calcolo combinatorio, matrici, etc. – abbiamo aggiunto alcuni complementi di teoria ai contenuti solitamente presentati in un corso di Matematica Generale, al fine di consentire al lettore una più ampia visione del *corpus* di metodologie e strumenti propri di alcune branche della matematica.

Struttura del libro

Questo primo volume è composto da una prefazione e da otto capitoli di teoria e pratica, più un'appendice contenente alcuni prerequisiti matematici necessari per l'apprendimento a livello universitario. Ciascuno degli primi otto capitoli è suddiviso in due parti: teoria e pratica. Nella parte teorica di ogni capitolo si danno tutte le nozioni fondamentali per lo svolgimento degli esercizi, nonché alcuni complementi di teoria. La parte pratica contiene i relativi esercizi, alcuni dei quali sono provvisti di risoluzione completa (o talvolta di suggerimenti per il loro svolgimento). Le risposte esatte a tutti i quesiti senza svolgimento sono raccolte alla fine del libro.

1. Teoria

Questo libro è autocontenuto. La Parte 1 dei primi otto capitoli contiene tutte le nozioni ed i risultati necessari per lo svolgimento degli esercizi di cui nella Parte 2. L'introduzione di nuovi concetti è accompagnata da un copioso numero di esempi illustrativi. Consigliamo un attento studio delle nozioni preliminari di teoria di ogni capitolo prima di affrontare i relativi esercizi.

Le ultime sezioni di alcuni capitoli contengono dei complementi di teoria, che trattano argomenti più tecnici e complessi. Per distinguerle dalle altre, tali sezioni sono marcate con un asterisco e possono essere omesse senza che ciò arrechi pregiudizio alla comprensione delle nozioni teoriche presentate nelle altre sezioni. Invero, l'obiettivo di questi complementi di teoria è esclusivamente

[1] Le note storiche relative alla vita degli scienziati, artisti, politici e letterati menzionati nel testo sono disponibili in rete, su *Wikipedia* oppure all'indirizzo *www-history.mcs.st-and.ac.uk* sul sito della *University of St. Andrews* (Scozia). Per una raccolta di aforismi inerenti la matematica, si veda, ad esempio, il sito personale di Gabriele Martufi.

quello di fornire ai lettori interessati la possibilità di approfondire i relativi argomenti, permettendo altresì di avere una visione d'insieme più completa ed organizzata della materia. Per la medesima ragione, abbiamo marcato con un asterisco anche alcuni (rari) risultati e dimostrazioni che richiedono nozioni complementari e/o ragionamenti tecnicamente complessi o di natura astratta. Infine, sono marcati con un asterisco anche i pochi esercizi che richiedono nozioni complementari.

2. Pratica

La Parte 2 di ciascun capitolo contiene i quesiti a scelta multipla, che sviluppano ed applicano le nozioni teoriche acquisite, spesso evidenziando quale, tra le diverse strategie a disposizione per la loro risoluzione, risulta la più efficiente. A tal proposito, osserviamo che l'approccio qui utilizzato è diverso da quello del libro di pratica già esistente

[G2024] Alfio Giarlotta.
Esercizi di Matematica Generale.
Terza edizione, Giappichelli 2024.

In quest'ultimo, l'approccio alla risoluzione degli esercizi è più diretto e pragmatico, in quanto si assume che la teoria sia stata già acquisita e maturata. Suggeriamo pertanto di tentare la risoluzione dei compiti d'esame presentati nel libro [G2024] dopo avere studiato gli esercizi del presente testo.

L'organizzazione dei quesiti della parte pratica è la seguente.

Numero: Il numero dei quesiti in ogni capitolo è un multiplo di tre, ma è variabile, essendo maggiore nei capitoli in cui la tipologia degli argomenti trattati è più variegata. Dei $3n$ esercizi proposti in ciascun capitolo, i primi n sono svolti per esteso, mentre i rimanenti $2n$ sono lasciati per esercizio (ma le risposte sono raccolte alla fine del libro).

Tipologia: Gli esercizi sono nella forma di quesiti a scelta multipla, con una sola risposta corretta tra le cinque risposte presentate. Nella maggior parte dei casi, si chiede al lettore di determinare l'asserzione VERA oppure FALSA tra le cinque asserzioni elencate.

Difficoltà: Ogni esercizio è marcato con un livello – approssimativo e, soprattutto, puramente soggettivo – di difficoltà, che varia da [1⋆] a [9⋆] e il cui significato è il seguente:

[1⋆] – facile;

[3⋆] – relativamente facile;

[5⋆] – medio;

[7⋆] – relativamente difficile;

[9⋆] – difficile.

(Il significato dei livelli [2⋆], [4⋆], [6⋆] e [8⋆] si determina per *interpolazione*.) Quasi tutti i quesiti hanno un livello di difficoltà compreso tra [3⋆] e [7⋆] (estremi inclusi). Tale livello si riferisce sia alla loro difficoltà concettuale che alla lunghezza del loro svolgimento. Si noti infine che la tipologia delle risposte contribuisce a modulare la difficoltà di un quesito. Infatti, in alcuni casi risulta più facile determinare l'unica risposta esatta scartando le risposte errate.[2]

Svolgimenti: Gli svolgimenti dei primi n esercizi di ogni capitolo sono abbastanza dettagliati. Per i quesiti svolti che si trovano in prossimità della fine di ogni capitolo, le spiegazioni sono meno meticolose per lasciare al lettore l'onere di colmare le (comunque piccole) lacune espositive/interpretative.

Suggerimenti: Per permettere un graduale adattamento ai quesiti presentati, questo testo contiene anche dei suggerimenti per alcuni esercizi senza svolgimento, raccolti alla fine di ogni capitolo. In alcuni casi, tali suggerimenti faranno anche diretto riferimento al libro [G2024].

[2] Si vedano, ad esempio, le considerazioni finali della soluzione dell'Esercizio 3.9 nel Capitolo di Calcolo Combinatorio.

Contributi degli autori

Si premette che entrambi gli autori hanno contribuito in modo consistente alla stesura di tutti i capitoli di questo volume. La **teoria** dei primi otto capitoli è stata tuttavia curata con particolare attenzione dai seguenti autori (l'ultimo capitolo, l'Appendice, è stata scritto da entrambi in eguale misura):

Alfio Giarlotta: logica, insiemistica, calcolo combinatorio, insiemi numerici, strutture algebriche;

Fabio Lamantia: matrici, sistemi lineari, rette.

Per la parte **pratica**, i quesiti a scelta multipla dei primi quattro capitoli sono tratti (a volte con modifiche) dal libro Giarlotta-Angilella [GA2017], mentre i quesiti degli ultimi quattro capitoli sono rielaborazioni di alcuni compiti d'esame di Matematica Generale (Corso di Laurea in Economia Aziendale, Dipartimento di Economia e Impresa, Università degli Studi di Catania) oppure sono stati creati *ex novo* per questo libro.

Ringraziamenti

Innanzitutto, siamo[3] grati a Silvia Angilella per il suo contributo alla stesura del libro [GA2017], da cui questo volume trae spunto. La ringraziamo altresì per la partecipazione all'elaborazione degli esercizi per il corso di Matematica Generale (Corso di Laurea in Economia Aziendale) tenuto all'Università degli Studi di Catania nel ventennio 2005-2024; molti di questi esercizi sono stati inclusi, previa opportuna rielaborazione, in questo primo volume della collana.

Esprimiamo la nostra gratitudine all'amico e collega Salvino Giuffrida[4] per i tanti preziosi suggerimenti dati con l'occhio del docente. Siamo anche estremamente grati agli allievi Angelo (Petralia), Davide (Carpentiere), Ester (Sudano) e Sergio (Sessa) per la correzione delle bozze di questo volume, nonché per i tanti commenti fatti con l'occhio dello studente. Gli eventuali errori e le inevitabili sviste sono comunque da attribuire esclusivamente a noi.

Un ringraziamento affettuoso va a Stefania Giarlotta, che si è occupata *in toto* dell'elaborazione del progetto grafico relativo alla copertina dei due libri di questa collana. Siamo altresì grati allo staff della Casa Editrice Giappichelli – ed in particolare al dott. Paolo Andreoli – per il supporto nel processo di elaborazione dei volumi di questa collana.

Infine, ringraziamo sin da ora tutti i lettori che vogliano contribuire a migliorare questi volumi segnalando la presenza di (purtroppo inevitabili) sviste o errori, nonché suggerendo modalità di presentazione dei loro contenuti che rendano più efficace l'apprendimento di una materia tradizionalmente ostica per lo studente.

[3] I ringraziamenti sono personali e sentiti, preferiamo farli in prima persona.

[4] Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Catania.

Capitolo 1

Elementi di Logica

"Il matematico gioca un gioco in cui egli stesso inventa le regole.
Il fisico gioca un gioco in cui le regole sono fornite dalla Natura.
Ma, con il passare del tempo, diventa sempre più evidente che
le regole che il matematico trova interessanti sono quelle che la Natura ha scelto."

Paul A. M. Dirac
(fisico e matematico, 1902 - 1984)

1.1 Teoria

1.1.1 Introduzione

In questo capitolo si forniscono alcune nozioni basilari di logica matematica. La trattazione dell'argomento è volutamente semplificata e necessariamente imprecisa, nel tentativo di mantenere l'esposizione ad un livello elementare. L'obiettivo è quello di fornire al lettore alcuni strumenti necessari ad affrontare in modo sistematico lo studio degli argomenti di Matematica Generale. Pertanto, si accennano soltanto alcune nozioni fondamentali di logica matematica, come quelle di *sintassi* (ossia le regole di composizione) e di *semantica* (ossia il significato) di un *linguaggio simbolico*. Inoltre, si utilizzano in modo intuitivo alcune nozioni matematiche elementari, quali quelle di insieme, elemento, appartenenza, numero, etc. (Tali nozioni saranno trattate in modo formale nel capitolo di *Insiemistica* di questo libro.)

La comprensione delle nozioni esaminate in questo primo capitolo è necessaria per una solida formazione matematica. Per tale ragione dedichiamo molto spazio (anche se manca un altrettanto ampio rigore formale) alla trattazione di alcuni concetti che vengono utilizzati in modo sistematico nei due volumi, accompagnandoli con molti esempi illustrativi delle loro modalità di applicazione. La conoscenza del significato di alcuni termini – quali quelli di *connettivo logico*, *quantificatore*, *definizione*, *dimostrazione*, *teorema*, *assioma*, *condizione necessaria*, *condizione sufficiente*, *esempio*, *controesempio*, etc. – è un prerequisito imprescindibile per la comprensione di tutti i concetti matematici, nonché per una loro corretta conversione in nozioni formali mediante l'utilizzo di un linguaggio simbolico.

Avvertiamo il lettore che, per motivi di spazio nonché in relazione ai nostri obiettivi, si è spesso privilegiato un approccio intuitivo alle nozioni di logica piuttosto che una loro rigorosa trattazione formale. Infatti, sarebbe necessario un intero volume per descrivere le problematiche connesse alla formalizzazione simbolica di alcuni concetti. Il famoso **paradosso del mentitore** illustra in modo lapidario le difficoltà che si nascondono negli anfratti di una trattazione logica di carattere formale: la locuzione "*Questa frase è falsa*" è vera o falsa?[1]

1.1.2 Sintassi

Gli elementi di un linguaggio simbolico sono i seguenti:

- **alfabeto**: un insieme finito di simboli;
- **stringhe**: le sequenze finite di elementi dell'alfabeto;
- **termini**: talune stringhe a cui si decide di attribuire rilevanza semantica;
- **formule o proposizioni logiche**: le sequenze finite di termini ottenute mediante connettivi logici e quantificatori.

Ad esempio, se consideriamo come linguaggio simbolico la "lingua italiana", l'alfabeto è l'insieme $\{a, b, c, \ldots, z\}$, le stringhe sono tutte le sequenze finite di simboli dell'alfabeto (ad esempio, "ahshalat", "apoftegma", "abbcccdddd", "mementoauderesemper"), i termini sono tutte le stringhe che sono presenti in un dizionario della lingua italiana (ed in testi specialistici), le formule sono le sequenze finite di parole formate secondo le regole grammaticali della lingua italiana (ad esempio, "apoftegma", "il sole beve automobili", "Catania è la capitale del Brasile"). Si noti che per creare una formula si prescinde totalmente dal suo significato nonché dal suo valore di verità.

1.1.3 Connettivi e quantificatori

I connettivi e i quantificatori sono utilizzati per "creare nuovo dal vecchio". Più precisamente, i connettivi sono degli *operatori* che si usano per ottenere formule nuove da formule preesistenti,

[1] Esistono varie versioni del paradosso del mentitore, elaborate da **Eubulide di Mileto** (IV secolo A.C.), **Aristotele** (IV secolo A.C.), **Diogene Laerzio** (II secolo D.C.), **Jean Buridan** (1292-1360), **Miguel de Cervantes** (1547-1616), **Philip Jourdain** (1879-1919). La sua versione originaria è attribuita al filosofo **Epimenide di Creta** (VI secolo A.C.). Il paradosso del mentitore può essere "risolto" in vari modi: si veda Aristotele, **Crisippo** (III secolo A.C.), **Guglielmo di Ockham** (1288-1349), Jean Buridan, etc. Tali soluzioni richiedono il ricorso a nozioni teoriche di una certa complessità concettuale, quali quelle di *metalinguaggio*, *logiche temporali*, *logiche a più valori*, etc.

elaborandole in vario modo. Essi hanno come oggetto una formula (connettivi *unari*) o due formule (connettivi *binari*).[2] I quantificatori si utilizzano per ottenere formule nuove da formule preesistenti mediante l'utilizzo di *variabili*, che possono assumere valori in un determinato *universo*. I connettivi e i quantificatori utilizzati sono i seguenti:

- **connettivi unari**: *negazione* $\neg$,
- **connettivi binari**: *unione logica* $\vee$ (leggasi "o"), *intersezione logica* $\wedge$ (leggasi "e"), *implicazione* $\Longrightarrow$, *equivalenza* o *doppia implicazione* $\Longleftrightarrow$,
- **quantificatori**: *esistenziale* $\exists$ (leggasi "esiste almeno un"),*universale* $\forall$ (leggasi "per ogni").[3]

Ad esempio, se A e B sono due formule, allora sono formule anche

- $\neg A$, $\neg B$, $A \wedge B$, $B \wedge A$, $A \vee B$, $B \vee A$, $A \Longrightarrow B$, $A \Longleftrightarrow B$,
- $\neg(\neg A)$, $\neg A \Longrightarrow B$, $((A \Longleftrightarrow B) \Longrightarrow A) \Longrightarrow (\neg A \wedge \neg(\neg(\neg B)))$.

Si noti che l'uso delle parentesi è necessario per determinare l'ordine in cui i connettivi binari sono utilizzati: ad esempio, le due formule

$$(A \Longrightarrow A) \Longrightarrow A \qquad \text{e} \qquad A \Longrightarrow (A \Longrightarrow A)$$

sono diverse. (Si noti che nel prosieguo potremmo utilizzare equivalentemente le due scritture "$A \Longrightarrow B$" e "$B \Longleftarrow A$": esse hanno esattamente lo stesso significato.)

Nel caso della lingua italiana, dalle proposizioni logiche "Peter abita a Toronto" e "il potere logora chi non lo possiede" si possono creare le nuove formule "Peter abita a Toronto *e* il potere logora chi non lo possiede" oppure "*se* Peter abita a Toronto, *allora* il potere logora chi non lo possiede", etc. Il fatto che alcune di tale formule non abbiano alcun significato nel senso comune è irrilevante, in quanto ci stiamo occupando di sintassi e non di semantica.

Formule generiche in cui sono presenti i quantificatori sono

$$(\forall\, x \in X)\ P(x) \qquad \text{e} \qquad (\exists\, x \in X)\ P(x)$$

che si leggono, rispettivamente:[4] "comunque si prenda un elemento x appartenente all'insieme X, vale $P(x)$" ed "esiste un elemento x appartenente all'insieme X per cui vale $P(x)$". In tali formule, $P(x)$ è un'asserzione, espressa in linguaggio simbolico, che predica dell'elemento/variabile x (appartenente all'insieme/universo X). Per alcune formule in cui è presente il quantificatore esistenziale, talvolta si usa il simbolo "$\exists!$" ("esiste esattamente un").

Nel caso della lingua italiana, le seguenti proposizioni logiche utilizzano i quantificatori:

(a) "tutti gli uomini sono mortali"

(b) "esiste una tigre di colore viola".

La formalizzazione simbolica di tali proposizioni rivela che (a) è del primo tipo e (b) del secondo. Invero, denotati con U l'insieme degli uomini, con T l'insieme delle tigri, con $M(u)$ il predicato che sta per "u è mortale", e con $V(t)$ il predicato che sta per "t è di colore viola",[5] le proposizioni (a) e (b) si scrivono, rispettivamente,

$$(\forall\, u \in U)\ M(u) \qquad \text{e} \qquad (\exists\, t \in T)\ V(t).$$

Si noti che la naturale ambiguità (nonché ricchezza) della lingua italiana – ed in generale di tutti i linguaggi non simbolici – non consente un'immediata traduzione simbolica di tutte le asserzioni formulabili. Ad esempio, per poter scrivere in modo simbolico l'asserzione

[2] Il concetto di "operatore" (unario, binario, ternario, etc.) è trasformato in nozioni matematiche secondo modalità che dipendono dal campo in cui esso viene applicato. Ritroveremo tale concetto nella trattazione di (i) *insiemi* (unione, intersezione, differenza, prodotto cartesiano, potenza di insiemi), (ii) *funzioni* (somma, prodotto, differenza, quoziente, composizione di funzioni), (iii) *matrici* (somma, differenza, prodotto, inversione, trasposizione), (iv) *strutture algebriche* (operazione binaria interna, operazione binaria esterna), etc.

[3] A rigore dovremmo distinguere tra logica **proposizionale** (che usa i connettivi ma non i quantificatori), logica **del primo ordine** (che utilizza anche i quantificatori, anche se con certe limitazioni), logica **del secondo ordine** (che utilizza i quantificatori in modo più ampio), etc. Tuttavia, per semplificare la trattazione, eviteremo di riferirci a tale distinzione.

[4] Il simbolo "$\in$" si legge "appartenente a".

[5] Attenzione al fatto che stiamo scrivendo "t è di colore viola", che è diverso da "t è viola" (anche se nella lingua italiana le due asserzioni sembrano essere equivalenti).

(c) "un uomo è più intelligente di una scimmia"

occorre capire il suo vero significato, ossia se si intenda (magari sarcasticamente):

(c1) "qualche uomo è più intelligente di qualche scimmia", oppure

(c2) "qualche uomo è più intelligente di tutte le scimmie", oppure

(c3) "tutti gli uomini sono più intelligenti di tutte le scimmie", oppure

(c4) "tutti gli uomini sono più intelligenti di qualche scimmia",

visto che la (c1), la (c2), la (c3) e la (c4) hanno un'attribuzione semantica completamente diversa. Denotato con S l'insieme delle scimmie e con $I(u,s)$ il predicato "u è più intelligente di s", le asserzioni (c1), (c2), (c3) e (c4) si scrivono, rispettivamente:

(c1′) $(\exists u \in U)\ (\exists s \in S)\ I(u,s)$

(c2′) $(\exists\, u \in U)\ (\forall s \in S)\ I(u,s)$

(c3′) $(\forall u \in U)\ (\forall s \in S)\ I(u,s)$

(c4′) $(\forall u \in U)\ (\exists s \in S)\ I(u,s)$.

1.1.4 Semantica

I **valori di verità** che una formula può assumere sono "vero" (V) oppure "falso" (F).[6] Nel caso in cui nella formula siano presenti dei connettivi logici, il suo valore di verità è determinato in accordo alla seguente **tavola di verità** (ove A e B sono arbitrarie proposizioni logiche):

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \Longrightarrow B$	$A \Longleftrightarrow B$
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F	F	F
F	V	V	F	V	F	**V**	F
F	F	V	V	F	F	**V**	V

I valori di verità attribuiti alle formule composte mediante connettivi seguono criteri aderenti alla loro interpretazione naturale. Per esempio, nel caso del connettivo unario di negazione, la tavola asserisce che se la formula A è vera, allora la sua negazione $\neg A$ è falsa (e, viceversa, se A è falsa, allora $\neg A$ è vera).

Altrettanto intuitiva è l'attribuzione semantica relativa al connettivo binario di unione logica: la formula composta $A \vee B$ è vera se almeno una tra A e B è vera, ed è falsa solo nel caso in cui sia A che B siano false. Si noti che la semantica dell'unione logica riproduce quella di un "*vel*" latino (ossia un "oppure inclusivo") e non di un "*aut*" (ossia un "oppure esclusivo").

Anche l'attribuzione semantica relativa al connettivo binario di intersezione logica è naturale. Infatti, la tavola di verità asserisce che se A è vera e B è vera, allora la formula $A \wedge B$ è anch'essa vera; viceversa, se almeno una tra A e B è falsa, allora $A \wedge B$ è anch'essa falsa.

Una particolare attenzione è richiesta per giustificare i valori di verità presenti nelle ultime due colonne (soprattutto quelli evidenziati in colore blu), ossia l'attribuzione semantica relativa ai connettivi binari di implicazione ed equivalenza. Considerata la sottile complessità di tali concetti nonché la loro imprescindibile importanza per una comprensione dei fondamenti della matematica, dedichiamo le prossime due sezioni ad una loro accurata disamina.

[6] In alcuni casi il valore di verità di una formula non è esattamente 0 (ossia F) oppure 1 (ossia V), potendo essere un qualunque numero compreso tra 0 e 1. Ad esempio, la proposizione "Gianfranco è alto" ha valore di verità 0 (ossia F) o 1 (ossia V) se Gianfranco è alto, rispettivamente 155 cm o 195 cm. Tuttavia, se Gianfranco è alto 175 cm, allora tale locuzione avrà probabilmente un grado di verità parziale, codificata da un numero compreso tra 0 e 1. I casi in cui il valore di verità di una formula logica è "sfuocato" sono trattati nella **fuzzy logic**, che è un'estensione della teoria classica in cui non valgono i principi aristotelici di non-contraddizione e del terzo escluso (si veda la Sezione 1.1.9). Si noti infine che il valore di verità di una proposizione di questo tipo è ambiguo se non si precisa l'ambiente a cui si applica. Per esempio, la sua valutazione sarebbe diversa nel caso in cui Gianfranco fosse un pigmeo oppure un membro della tribù dei Tutsi e la sua altezza dovesse essere valutata relativamente al gruppo etnico di riferimento.

1.1.5 Condizione necessaria, condizione sufficiente

La maggior parte dei risultati di questi due volumi (nonché molte proposizioni della lingua italiana) sono espressi nella forma di implicazioni del tipo "$A \implies B$", ove A e B sono asserzioni matematiche.[7] Tale implicazione si può leggere in vari modi equivalenti:

- "*se* A, *allora* B", oppure
- "A *implica* B", oppure
- "A è *condizione sufficiente* per B", oppure
- "B è *implicato da* A", oppure
- "B è *condizione necessaria* per A".[8]

L'attribuzione semantica a tale implicazione effettuata nella tavola di verità codifica una "sequenzialità materiale" (e non necessariamente "concettuale") tra l'asserzione A, detta **antecedente**, e l'asserzione B, detta **conseguente**. Al fine di chiarire il significato della nozione di **implicazione materiale**, consideriamo le due seguenti implicazioni espresse nel linguaggio italiano:

(a) *se* nel 2011 il Presidente del Consiglio dei Ministri della Repubblica Italiana è Silvio Berlusconi[9] e la Costituzione della Repubblica Italiana prevede che il Presidente del Consiglio dei Ministri promuova e coordini l'attività del Governo della Repubblica Italiana, *allora* nel 2011 Silvio Berlusconi promuove e coordina l'attività del Governo della Repubblica Italiana;

(b) *se* nel 2011 il Presidente del Consiglio dei Ministri della Repubblica Italiana è Silvio Berlusconi e la Costituzione della Repubblica Italiana prevede che il Presidente del Consiglio dei Ministri promuova e coordini l'attività del Governo della Repubblica Italiana, *allora* la Terra gira attorno al Sole.

Per quanto scritto nella tavola di verità della Sezione 1.1.4, entrambe le implicazioni (a) e (b) sono vere, essendo veri sia l'antecedente che il conseguente. Tuttavia, mentre non esiste alcun motivo per dubitare della verità dell'implicazione (a), in quanto relativa a due asserzioni vere nonché concettualmente collegate tra loro, viceversa si potrebbe nutrire qualche legittimo dubbio circa la verità dell'implicazione (b), poiché essa mette in relazione due fatti che non hanno alcun apparente legame concettuale, ancorché entrambi veri.

Il considerare vere entrambe le proposizioni (a) e (b) discende dalla necessità logica di rendere assoluta l'attribuzione semantica di un'implicazione, basandola esclusivamente sui valori di verità di antecedente e conseguente. Infatti, se il valore di verità di un'implicazione dovesse in qualche modo dipendere da possibili/presunte relazioni concettuali tra antecedente e conseguente, si causerebbe non poca confusione, essendo le relazioni concettuali puramente soggettive e non oggettive.[10] I dubbi sulla verità dell'implicazione (b) sorgono perché si tende a confondere il concetto di "verità" con quello di "utilità". Se ci si limita a guardare alla verità materiale di una proposizione anziché alla sua possibile utilità, allora anche la (b) è vera (anche se completamente inutile), perché tali sono antecedente e conseguente.

I due esempi presentati illustrano le ragioni per cui nella tavola di verità della Sezione 1.1.4 la formula "$A \implies B$" risulta vera in tutti i casi in cui sia l'antecedente A che il conseguente B siano veri (ossia la prima riga). Per quanto riguarda gli altri tre valori di verità relativi all'implicazione, due di essi (evidenziati in blu) abbisognano di un'attenta giustificazione, in quanto parzialmente controintuitivi. Consideriamo le seguenti implicazioni:

[7] Le implicazioni matematiche sono, spesso implicitamente, precedute da una quantificazione universale relativa all'oggetto della formula, sia esso un numero, un insieme, una matrice, una retta, una funzione, etc.

[8] I giuristi direbbero che B è *conditio sine qua non* affinché A si verifichi.

[9] La scrittura della versione originaria del libro Giarlotta-Angilella [GA2017] (da cui questo volume trae spunto) risale all'epoca in cui Silvio Berlusconi era Presidente del Consiglio dei Ministri della Repubblica Italiana. Per varie ragioni – anche affettive – abbiamo deciso di riprodurre alcuni esempi citati nel testo originario.

[10] Si pensi al caso in cui si attribuisca una valenza concettuale all'implicazione (b).

(c) *se* nel 2011 il Presidente della Repubblica Italiana è Giorgio Napolitano[11] e la residenza ufficiale del Presidente della Repubblica è il Palazzo del Quirinale, *allora* nel 2011 il Colosseo è la residenza ufficiale di Giorgio Napolitano;

(d) *se* esiste un cane volante, *allora* la popolazione della Cina è superiore a quella dell'Italia;

(e) *se* la Fiat 500 ha una velocità massima superiore a quella della Ferrari 599 GTO, *allora* "la IX Sinfonia di Ludwig van Beethoven" è il titolo di un quadro del Caravaggio.[12]

Per quanto scritto nella tavola di verità dei connettivi, la (c) è falsa (essendo vero l'antecedente e falso il conseguente), la (d) è vera (essendo falso l'antecedente e vero il conseguente) e la (e) è vera (essendo falsi sia l'antecedente che il conseguente).

Riteniamo che difficilmente si potrebbero nutrire dubbi sulla falsità dell'asserzione (c), nonché, più in generale, sulla falsità delle implicazioni in cui l'antecedente è vero e il conseguente è falso. Pertanto, in tali casi il valore attribuito dalla tavola di verità presentata nella Sezione 1.1.4 coincide con quello che l'intuizione supporta.

Viceversa, risulta forse innaturale il considerare vere le implicazioni (d) ed (e), nonché, più in generale, le implicazioni nei casi evidenziati in blu nella precedente tavola di verità. Specificamente, si legge in tale tavola che l'implicazione "$A \Longrightarrow B$" risulta vera anche nei casi in cui l'antecedente A sia falso, a prescindere dal valore di verità del conseguente B. Tale scelta aprioristica relativa alla semantica dell'implicazione discende da ragioni filosofiche e tecniche, efficacemente sintetizzate dalla locuzione "*ex falso quodlibet sequitur*", ossia "dal falso segue qualsiasi cosa".

A giustificazione del principio "*ex falso quodlibet sequitur*", consideriamo le seguenti due formule matematiche poste nella forma di implicazione:[13]

(i) "Per ogni numero naturale n, se n è pari, allora $n+1$ è dispari";

(i′) "Se n è un numero naturale pari, allora $n+1$ è dispari".

È naturale ritenere che le due asserzioni (i) e (i′) abbiano l'identico significato, dunque ci si attende che abbiano anche lo stesso valore di verità in tutte le circostanze possibili. Non si possono nutrire dubbi sulla verità dell'asserzione (i′): invero, nei casi in cui n è pari, il suo successore $n+1$ è dispari, e dunque l'implicazione è vera (in quanto sono tali sia l'antecedente che il conseguente).

Tuttavia, la formula (i) consente al numero n qualcosa che la (i′) non prevede esplicitamente, ossia che n sia un *arbitrario* numero naturale. Cosa accadrebbe se il numero naturale n fosse dispari? Sorge allora spontanea la perplessità che la formula (i) possa non essere vera per i numeri naturali dispari, ma lo sia soltanto per quelli pari. Ciò genererebbe non poca confusione, in quanto la (i) e la (i′) avrebbero dei valori di verità diversi, a dispetto della loro naturale equivalenza semantica. Al fine evitare questa confusione, si stabilisce *a priori* che l'implicazione risulti sempre vera (più precisamente, "vacuamente vera") in tutti i casi in cui l'antecedente sia falso. In altri termini, anche se la formula (i) predica di un numero naturale generico, tuttavia essa impone che l'implicazione valga solo per i numeri pari, nulla asserendo per i numeri dispari: pertanto, in tutti i casi in cui il numero n sia dispari non si deve verificare assolutamente niente, e dunque la formula è vera anche in tali circostanze.

Questa lunga dissertazione relativa al principio di implicazione materiale si rende necessaria per comprendere appieno la portata dei risultati presentati nei due volumi di questa collana. Infatti, molti di tali risultati si codifcano come formule del tipo "$A \Longrightarrow B$", usualmente precedute da una quantificazione universale (sia essa esplicita o, più spesso, sottintesa). Chiariremo meglio come tale principio si applichi in concreto nella Sezione 1.1.7, ivi presentando alcuni esempi di proposizioni matematiche poste nella forma di implicazione.

[11] Si veda quanto scritto nella Nota 9.

[12] Il conseguente dell'implicazione (e) è falso a prescindere da una conoscenza capillare delle opere del Caravaggio, visto che Beethoven compose la sua IX Sinfonia qualche secolo dopo la morte del Caravaggio.

[13] L'insieme dei numeri naturali è $\mathbb{N}=\{0,1,2,3,\ldots,100,\ldots\}$: si veda la Sezione 2.1.6 del Capitolo di Insiemistica.

1.1.6 Condizione necessaria e sufficiente

Date due formule A e B, la formula "$A \iff B$" si può leggere in vari modi:

- "A è *logicamente equivalente* a B", oppure
- "A *se e solo se* B", oppure
- "A è *condizione necessaria e sufficiente* affinché B", oppure
- "B è *condizione necessaria e sufficiente* affinché A", oppure
- "A è una *caratterizzazione* di B", oppure
- "B è una *caratterizzazione* di A".

La formula composta "$A \iff B$" esprime una interscambiabilità logica tra le due formule A e B. Pertanto, come si legge nell'ultima colonna della tavola di verità presentata nella Sezione 1.1.4, essa risulta vera soltanto nei casi in cui A e B abbiano lo stesso valore di verità, risultando entrambe vere oppure entrambe false.[14]

Similmente a quanto osservato per l'attribuzione semantica relativa al connettivo di implicazione materiale, al fine di determinare il valore di verità di un'equivalenza del tipo "$A \iff B$" occorre e basta esaminare il valore di verità delle asserzioni A e B, prescindendo completamente dal fatto che i concetti ad esse corrispondenti siano in qualsivoglia modo collegati. Ad esempio, le seguenti equivalenze logiche sono tutte vere:

(a) la matematica è utile alla scienza *se e solo se* Napoleone Bonaparte perse la battaglia di Waterloo nel 1815;

(b) Vincent van Gogh è un pittore cinese del X secolo *se e solo se* l'Italia è una repubblica presidenziale basata sul potere mediatico;[15]

(c) il Sole è nero *se e solo se* la Terra è quadrata.

Infatti, le asserzioni collegate tra loro dal "se e solo se" sono o entrambe vere – nel caso (a) – o entrambe false – nei casi (b) e (c). Viceversa, le seguenti equivalenze logiche sono false:

(d) la matematica è utile alla scienza *se e solo se* Napoleone Bonaparte vinse la battaglia di Waterloo nel 1815;

(e) il patrimonio artistico italiano è uno dei motivi per cui alcuni turisti visitano l'Italia *se e solo se* l'unità d'Italia è stata realizzata nel 1994;

(f) l'Italia ha una superficie maggiore del Brasile *se e solo se* l'Etna è il vulcano più alto d'Europa.

È evidente che le equivalenze matematiche "$A \iff B$" che rivestono un qualche interesse scientifico sono soltanto quelle in cui le asserzioni A e B – oltre ad essere entrambe vere – sono tra loro legate da una qualche relazione concettuale. Da questo punto di vista, le equivalenze simili alla (a) – in cui le due asserzioni collegate dal "se e solo se" sono vere ma concettualmente non correlate – costituiscono soltanto delle mere curiosità logiche, non contribuendo in alcun modo alla conoscenza o allo sviluppo della civiltà. Naturalmente le equivalenze logiche presentate in questi volumi sono caratterizzate non solo dalla loro *verità*, ma anche (si spera) dalla loro *utilità*.

[14] Utilizzando la nozione di *equiveridicità* di cui nella Sezione 1.1.8, la formula "$A \iff B$" è vera se e solo se le due formule A e B sono equiveridiche.

[15] Alcuni lettori potrebbero dubitare della verità storica di tale equivalenza.