1

Capitalizzazione e attualizzazione

1.1. Operazioni finanziarie

La Matematica Finanziaria studia i criteri per la valutazione razionale di importi monetari la cui disponibilità non coincide con l'istante di valutazione. È evidente, infatti, che il "valore" di una somma di denaro si incrementa al passare del tempo, sia in un'operazione di investimento (in cui si rinuncia alla disponibilità immediata di una somma di denaro nella prospettiva di ottenere in futuro un importo superiore), sia in un'operazione di finanziamento (nella quale si riceve al momento una somma inferiore a quella che si dovrà rimborsare a scadenza). Tutti i casi ora descritti comportano – almeno concettualmente – uno "scambio" tra importi disponibili a tempi diversi; di conseguenza, il "valore" della somma di denaro che si vuole valutare coincide con quell'importo che oggi si può scambiare con essa. Lo scambio in parola si definisce più propriamente *operazione finanziaria*.

Operazione finanziaria è qualsiasi contratto (o accordo) che dia origine allo scambio di somme di denaro riferite ad epoche diverse tra due soggetti.

Sono esempi di operazioni finanziarie:

– acquisto di BOT e successiva vendita;
– acquisto di certificati di deposito a scadenza fissa;
– sconto di cambiale;
– accensione di mutui;
– acquisti a pagamento rateale;
– contratti di *leasing*.

Un'operazione finanziaria si dice *semplice* o *complessa* a seconda che vi siano coinvolte due o più scadenze. Ad esempio, è un'operazione semplice lo sconto di una cambiale, nel quale intervengono due tempi rilevanti: quello in cui la banca anticipa al portatore della cambiale la somma scontata, e quello in cui la stessa banca entra in possesso del capitale della cambiale, pagato dal debitore. Un'operazione complessa è invece l'investimento in un BTP: in questo caso le date rilevanti – cioè quelle in cui si registrano movimenti di capitali – sono l'istante di investimento (nel quale si entra in possesso del titolo) e le date di incasso di ciascuna delle cedole, nonché quella del rimborso finale del capitale.

Nel seguito di questo primo capitolo verranno prese in considerazione solamente le operazioni finanziarie semplici, mentre nei capitoli successivi verranno affrontate le operazioni finanziarie complesse.

1.1.1. Operazioni finanziarie a pronti e a termine

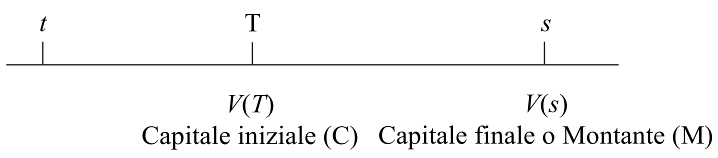
Avendo a riferimento l'istante di stipula del contratto, l'operazione finanziaria verrà detta *a pronti* o *spot* se la transazione avviene nello stesso momento della stipula; l'operazione finanziaria verrà invece detta *a termine* o *forward* se la transazione avverrà in un momento successivo.

Un'operazione a pronti stipulata al tempo t, data in cui per definizione inizia la transazione, con scadenza s, denotando il valore monetario scambiato ai rispettivi tempi con $V(t)$ e $V(s)$, può essere rappresentata come segue:

Figura 1.1. – Operazione a pronti

Per contro, un'operazione a termine stipulata al tempo t, con inizio al tempo T e con scadenza s, con una notazione coerente con la precedente, può essere rappresentata come segue:

Figura 1.2. – Operazione a termine



Di norma, qualora non si renda necessario esplicitare i tempi a cui sono disponibili i vari flussi monetari, il capitale iniziale viene anche indicato con C e il capitale finale con M.

1.2. Montante, interesse e sconto

Riesce del tutto ragionevole ritenere che il montante sia superiore al capitale iniziale: ciò sia per corrispondere a fondamentali postulati economici, sia per salvaguardare l'ipotesi di comportamento razionale degli agenti. Infatti, chi rinuncia oggi ad una disponibilità finanziaria, differendola nel tempo, richiede che gli venga corrisposto un adeguato compenso. Analogamente, chi richiede oggi la disponibilità di una somma che gli sarebbe dovuta ad una data futura, deve corrispondere un adeguato compenso. In entrambi i casi, questo compenso è dato dalla differenza tra il montante e il capitale iniziale, e viene detto *interesse* (I) o *sconto* (D). Si ha quindi, per definizione:

$$I = D = M - C.$$

Nel caso in cui si renda necessario evidenziare il periodo di riferimento a cui interesse e sconto si riferiscono, la precedente relazione esplicita anche l'istante di inizio e la scadenza dell'operazione finanziaria

$$I(t,s) = D(t,s) = V(s) - V(t).$$

1.3. Fattore di montante e fattore di sconto

Con riferimento ad una operazione finanziaria a pronti che inizia all'istante t e termina all'istante s, con $u(t, s)$ si indica il valore all'istante s di 1 € disponibile all'istante t. Da un punto di vista prettamente economico rappresenta il valore che un ipotetico investitore richiede al tempo s per rinunciare alla disponibilità di 1 € al tempo t fino alla scadenza dell'operazione, tempo s. $u(t, s)$ può quindi essere considerato come il montante unitario per una durata da t a s e prende il nome di *fattore di montante*.

Analogamente, con $v(t, s)$ si indica il valore all'istante t di 1 € disponibile all'istante s. Da un punto di vista prettamente economico rappresenta il prezzo che un ipotetico investitore è disposto a pagare al tempo t per ottenere la disponibilità di 1 € al tempo s. La stessa operazione può essere anche vista come il valore che si ottiene al tempo t per farsi anticipare la disponibilità di 1 € altrimenti disponibile in s. $v(t, s)$ può quindi essere considerato come il valore attuale unitario per una durata da t a s e prende il nome di *fattore di sconto*.

Con tali definizioni risulta immediato definire l'equivalenza finanziaria fra quantità monetarie disponibili a scadenze diverse.

Note ad esempio la data di inizio t e la data di fine s dell'operazione finanziaria, nonché il capitale iniziale $V(t)$, si ha che

$$V(s) = u(t,s)V(t) \qquad [1.1]$$

In questo contesto in cui il problema è quello di determinare il montante, o valore finale, si parla di operazione di *capitalizzazione* e il fattore di montante può essere visto come l'operatore che permette di "spostare" in avanti la disponibilità dei capitali, nel senso che, data una quantità monetaria disponibile in un certo istante temporale, permette di trovarne l'equivalente in un istante di tempo successivo.

Qualora, sempre note data di inizio e data di fine dell'operazione finanziaria, sia ora noto il valore finale o montante $V(s)$ e si voglia recuperare l'equivalente valore iniziale $V(t)$, si parlerà di operazione di *attualizzazione* ottenendo la relazione

$$V(t) = v(t, s)V(s) \tag{1.2}$$

In tal caso il fattore di sconto può essere visto come l'operatore che permette di "spostare" indietro la disponibilità dei capitali, nel senso che, data una quantità monetaria disponibile in certo istante temporale, permette di trovarne l'equivalente in un istante di tempo precedente.

Fattori di montante e fattori di sconto sono nella pratica particolari funzioni, la cui scelta e il cui utilizzo è stabilito di comune accordo tra le parti interessate (quindi non esiste alcun caso in cui sia obbligatorio usare una funzione piuttosto che un'altra – semmai si potrà parlare di consuetudini vigenti sul mercato).

Nel caso in cui fattore di montante e fattore di sconto soddisfino la relazione

$$v(t, s)u(t, s) = 1 \tag{1.3}$$

si dicono fattori *coniugati* fra loro e definiscono un *regime finanziario*.

Analoghe considerazioni valgono per le operazioni a termine dove il fattore di montante e il fattore di sconto a termine verranno indicati con $u(t, T, s)$ e $v(t, T, s)$ dove t è l'istante di stipula del contratto, T l'istante di inizio dell'operazione e s l'istante di fine dell'operazione. Ulteriori considerazioni al riguardo verranno svolte nel capitolo dove verrà presentata la struttura per scadenza dei tassi di interesse.

Avendo a che fare con un'operazione finanziaria, semplice o complessa, a pronti o a termine, risulta utilissimo schematizzarla e rappresentarla graficamente utilizzando un asse dei tempi come quelli utilizzati nelle Figure 1.1 e 1.2.

1.4. Regimi finanziari

I regimi finanziari sono caratterizzati da diverse proprietà, alcune indispensabili, ed altre eventuali. Le proprietà indispensabili corrispondono a condizioni finanziarie basilari, senza le quali si verificherebbero situazioni paradossali e indesiderabili per un regime finanziario.

1.4.1. Proprietà indispensabile

È lecito aspettarsi che se la data di inizio t e la data di fine s coincidono, e quindi l'operazione ha una durata nulla, sia che venga investito sia che venga attualizzato 1 € resta sempre 1 €. Detto in altri termini, senza attesa non ha senso che ci sia interesse I, e senza anticipo non ha senso applicare alcuno sconto D. Per le funzioni fattore di capitalizzazione e di attualizzazione questo comporta che debba valere la seguente proprietà:

$$u(t,t) = 1 \quad \text{e} \quad v(s,s) = 1 \tag{1.4}$$

dove abbiamo posto $s = t$ nella funzione di capitalizzazione e $t = s$ in quella di attualizzazione. In generale, se la durata dell'operazione è nulla, Capitale e Montante coincidono $C = M$.

1.4.2. Proprietà eventuale: traslabilità

Una proprietà eventuale, ma comunque altamente raccomandabile, per un regime finanziario è quella che rende l'Interesse I e lo sconto D una funzione della sola durata dell'operazione finanziaria, e non della particolare collocazione temporale della data di inizio t e della data di fine s. Questo significa che un Capitale investito per un anno, ad esempio, sarà equivalente allo stesso Montante finale *qualunque sia l'anno in questione*. Allo stesso modo, se dovessi scontare una cambiale con un anticipo di 60 giorni, lo sconto applicato sarà lo stesso a prescindere dai particolari giorni del calendario coinvolti. Se conta solo la durata dell'operazione, allora spostare l'istante iniziale e quello finale lasciando inalterata la loro distanza non deve sortire alcun effetto sull'operazione in questione:

$$u(t+q, s+q) = u(t,s) \quad \forall q \in \mathbb{R} \tag{1.5}$$

e

$$v(t+q, s+q) = v(t,s) \quad \forall q \in \mathbb{R} \tag{1.6}$$

Se tale proprietà è soddisfatta dal fattore di montante, lo è anche necessariamente dal fattore di sconto coniugato e viceversa. In tal caso si dice che il regime finanziario è *traslabile*. Se un regime è traslabile allora le funzioni fattore di montante e di sconto posso essere riscritte come funzioni ad un solo argomento: la durata dell'operazione, che indicheremo con la lettera greca τ, che definiamo come $\tau = s - t$. Quindi avremo $u(\tau)$ e $v(\tau)$. Se un regime è traslabile, la proprietà [1.4] si può scrivere così:

$$u(0) = 1 \text{ e } v(0) = 1 \tag{1.7}$$

perché se $s = t$ allora $\tau = 0$.

1.4.3. Proprietà eventuale: monotonia

Un'altra proprietà di un regime finanziario che è eventuale ma comunque molto diffusa è la *monotonia* delle funzioni $u(t, s)$ e $v(t, s)$. In particolare si ritiene realistico assumere che 1 € frutti tanti più interessi quanto più lungo è il tempo che resta investito e, nel caso delle operazioni di attualizzazione, che su 1 € si debba applicare uno sconto che aumenta all'aumentare dell'anticipo richiesto. Quindi la funzione $u(t, s)$ deve essere monotòna crescente e la funzione $v(t, s)$ deve essere monotòna decrescente rispetto all'istante finale s, in particolare se le funzioni sono derivabili equivale a richiedere che

$$\frac{\partial}{\partial s}u(t,s) > 0 \quad \forall s > t \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial s}v(t,s) < 0 \quad \forall s > t \qquad [1.8a]$$

che per i regimi traslabili diventano:

$$u'(\tau) > 0 \quad \text{e} \quad v'(\tau) < 0 \qquad [1.8b]$$

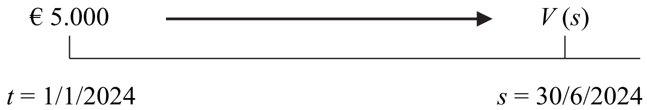
Questa proprietà può essere indebolita prevedendo la possibilità di interessi e sconto che oltre ad aumentare con la durata dell'operazione possano anche restare costanti (solitamente nulli). Nel qual caso alle disuguaglianze strette delle proprietà [1.8a] e [1.8b] si sostituiscono delle disuguaglianze con il segno di uguale, con il significato di richiedere funzioni fattore di montante non decrescenti e funzioni fattore di sconto non crescenti [1].

1.4.4. Proprietà eventuale: scindibilità

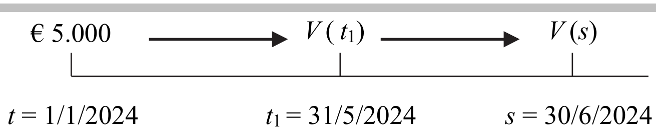
Un'altra proprietà eventuale di un regime finanziario è la proprietà di scindibilità. Questa proprietà fa riferimento alla possibilità di interrompere anticipatamente l'operazione di investimento e immediatamente riprenderla alle stesse condizioni, e alla valutazione degli effetti finanziari di questa strategia, confrontandone il montante finale con quello che si potrebbe conseguire procedendo senza interruzioni.

Le alternative sono schematizzabili ad esempio nel modo seguente:

– investire € 5.000 al tempo $t = 1/1/2024$ e incassare $V(s)$ al tempo $s = 30/6/2024$.



– interrompere l'operazione in $t_1 = 31/5/2024$ e, sempre in t_1, reimpiegare il montante allora disponibile fino all'epoca $s = 30/6/2024$



A priori, non è detto che i montanti a scadenza abbiano valori uguali; le leggi finanziarie per le quali ciò accade si dicono *scindibili.*

---

[1] Per le funzioni fattore di montante si potrebbe ammettere anche la possibilità che siano decrescenti, implicando interessi negativi che diminuiscono all'aumentare della durata dell'operazione. Questa eventualità equivale ad ammettere la possibilità di avere tassi di interesse negativi.

Matematicamente, una legge di capitalizzazione è *scindibile* se il corrispondente fattore di montante $u(t, s)$ soddisfa la seguente relazione:

$$u(t,s) = u(t,t_1)u(t_1,s) \qquad \text{con} \qquad t < t_1 < s. \tag{1.9a}$$

che nei regimi traslabili, e quindi con funzioni ad una variabile, diventa:

$$u(\tau_1 + \tau_2) = u(\tau_1)u(\tau_2) \tag{1.9b}$$

1.5. Tasso di interesse e tasso di sconto

L'interesse e lo sconto possono essere messi in rapporto rispettivamente con il capitale iniziale e con il montante, ottenendo rispettivamente il *tasso di interesse di periodo*

$$i(t,s) = \frac{I(t,s)}{V(t)} = \frac{V(s)}{V(t)} - 1 = u(t,s) - 1$$

e il *tasso di sconto di periodo*:

$$d(t,s) = \frac{D(t,s)}{V(s)} = 1 - \frac{V(t)}{V(s)} = 1 - v(t,s)$$

In particolare, se la durata è unitaria ($s - t = 1$) il numero

$$i(t,t+1) = u(t,t+1) - 1$$

è detto *tasso unitario di interesse*, e il numero

$$d(t,t+1) = 1 - v(t,t+1)$$

è detto *tasso unitario di sconto.*

Come si è potuto notare, tasso di interesse e tasso di sconto, oltre che essere definiti in termini di valore iniziale e valore finale, possono essere definiti in termini di fattore di montante e fattore di sconto. Qualora essi si riferiscano alla stessa operazione finanziaria, usando fattori di montante e sconto coniugati, si può agevolmente trovare una relazione che lega tasso di interesse e tasso di sconto. Infatti, omettendo per semplificare la notazione gli indici temporali t ed s, dalla definizione di leggi coniugate si ha

$$uv = 1$$

$$(1+i)(1-d) = 1$$

$$i = \frac{d}{1-d} \quad \text{e} \quad d = \frac{i}{1+t}$$

Da queste relazioni si può facilmente dedurre che per tassi strettamente positivi il tasso di sconto d è sempre più piccolo del corrispettivo tasso d'interesse i, e che all'aumentare del tasso di interesse aumenterà anche il tasso di sconto.

1.5.1. Periodicità del tasso

Occorre prestare particolare attenzione alla corrispondenza tra l'unità di misura prescelta per la valutazione dei tempi e quella utilizzata per determinare il tasso unitario di interesse (o di sconto). La definizione infatti esige che queste coincidano.

Sia i il tasso annuo e i_k il tasso espresso in ragione di $1/k$ di anno.

A seconda dell'unità di tempo fissata si avrà quindi:

- *Tasso mensile* (i_{12}) $\leftrightarrow$ unità di tempo: 1 mese
- *Tasso trimestrale* (i_4) $\leftrightarrow$ unità di tempo: 1 trimestre
- *Tasso semestrale* (i_2) $\leftrightarrow$ unità di tempo: 1 semestre
- *Tasso annuo* $\leftrightarrow$ unità di tempo: 1 anno
- *Tasso biennale* ($i_{0,5}$) $\leftrightarrow$ unità di tempo: 1 biennio
- ecc.

Il tasso unitario di interesse può quindi essere riferito all'anno o ad una sua frazione o ad un suo multiplo.

Per una maggiore precisione nell'enunciare tassi d'interesse, si utilizza spesso il concetto di *punto base* (basis point). Il punto base corrisponde allo 0,01%. Per esempio, se i tassi salgono da 2,75% a 3%, si dice che il tasso è salito di 25 punti base.

1.6. La forza d'interesse

I regimi finanziari posso anche essere descritti analizzando in che modo si manifesta l'accrescimento del montante nel tempo, ovvero il processo di formazione dell'interesse.

Si consideri l'interesse $I(s, s+\Delta s)$ prodotto dalla capitalizzazione nell'intervallo di tempo $(s, s+\Delta s)$ di un euro investito al tempo t ($C=V(t)=1$), cioè:

$$I(s, s+\Delta s) = V(s, s+\Delta s) - V(s).$$

Consideriamo questa capitalizzazione, di durata Δs, "isolata" dal contesto. Rapportando tale interesse al montante raggiunto al tempo s si ottiene allora:

$$i(s, s+\Delta s) = \frac{V(s+\Delta s)-V(s)}{V(s)} = \frac{u(t,s+\Delta s)-u(t,s)}{u(t,s)}.$$

Definiamo *intensità d'interesse* il rapporto

$$\frac{i(s, s+\Delta s)}{\Delta s} = \frac{u(t, s+\Delta s) - u(t,s)}{\Delta s} \cdot \frac{1}{u(t,s)}$$

Se $u(t, s)$ è differenziabile, calcolando il limite per $\Delta s \to 0$ dell'intensità d'interesse, si ottiene:

$$\delta(t,s) = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{i(t,s+\Delta s)}{\Delta s} = \frac{1}{u(t,s)} \frac{\partial}{\partial s} u(t,s) \qquad [1.10]$$

che si definisce *intensità istantanea d'interesse* o *forza d'interesse*.

Si noti che un altro modo di scrivere l'espressione della forza d'interesse è il seguente:

$$\delta(t,s) = \frac{\partial}{\partial s} \ln[u(t,s)]. \qquad [1.11]$$

In un regime traslabile la forza d'interesse si calcola così:

$$\delta(\tau) = \frac{u'(\tau)}{u(\tau)}. \qquad [1.12]$$

I concetti di forza d'interesse e scindibilità sono legati tra loro dalla seguente proprietà:

Teorema 1.1. *Se un regime finanziario è scindibile allora è caratterizzato da una forza d'interesse costante nel tempo*

Dimostrazione

Partiamo dalla definizione di regime finanziario scindibile in un regime non necessariamente traslabile:

$$u(t,s) = u(t,t_1)u(t_1,s) \qquad \text{con} \qquad t < t_1 < s.$$

e prendiamone i logaritmi:

$$\ln[u(t,s)] = \ln[u(t,t_1)] + \ln[u(t_1,s)]$$

Passiamo adesso al calcolo della derivata parziale rispetto all'istante finale *s*:

$$\frac{\partial}{\partial s}\ln[u(t,s)] = \frac{\partial}{\partial s}\ln[u(t,t_1)] + \frac{\partial}{\partial s}\ln[u(t_1,s)].$$

Dopo aver notato che $\frac{\partial}{\partial s}\ln[u(t,t_1)] = 0$ (poiché la variabile *s* non è presente), abbiamo:

$$\delta(t,s) = \delta(t_1,s),$$

che significa che la forza d'interesse non è influenzata dall'istante di tempo in cui viene calcolata, ed è quindi costante nel tempo. Per un regime traslabile una forza d'interesse costante nel tempo significa che τ non compare nella sua espressione, e quindi resta costante lungo tutta la durata dell'operazione. Questa coincidenza di scindibilità e costanza della forza d'interesse non è difficile da comprendere. Infatti in un regime finanziario in cui gli interessi crescono sempre ad una stessa velocità, l'operazione di capitalizzazione intermedia diventa indifferente perché l'interruzione e la ripresa della capitalizzazione con un capitale maggiore non comporta vantaggi né svantaggi.

1.7. Regime a interesse semplice (RIS)

Il regime a interesse semplice (RIS) nasce e trova applicazione per regolare operazioni finanziarie semplici dove sia previsto che il montante, capitale più interessi, venga interamente corrisposto alla fine dell'operazione finanziaria stessa e che, coerentemente con la definizione di operazione finanziaria semplice, non ci siano pagamenti intermedi tra la data di inizio e la data di fine dell'operazione stessa.

Tale regime si basa sull'ipotesi che l'interesse maturato dal tempo t al tempo s sia direttamente proporzionale al capitale iniziale e alla durata $\tau = s - t$ dell'operazione, secondo un fattore di proporzionalità pari al tasso unitario di interesse i che si suppone costante. Si stabilisce cioè che

$$I(\tau) = V(t)i\tau \qquad [1.13]$$

e pertanto

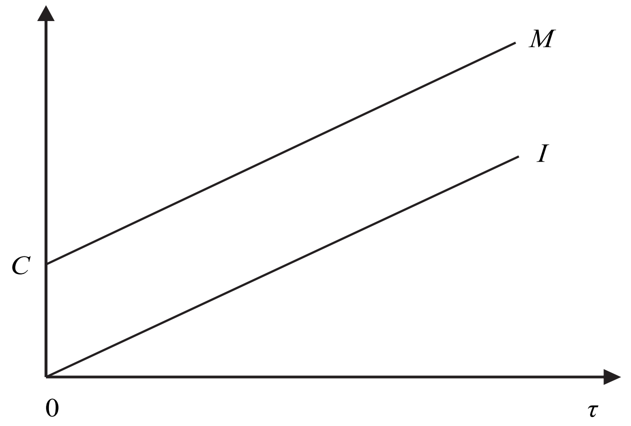
$$V(s) = V(t+\tau) = V(t) + I(\tau) = V(t) + V(t)i\tau = V(t)(1 + i\tau). \qquad [1.14]$$

In generale, un capitale C investito per un intervallo di tempo lungo τ fornisce un montante M:

$$M = C(1 + i\tau). \qquad [1.15]$$

Secondo questo regime finanziario l'andamento nel tempo del montante e dell'interesse è rappresentato nel grafico seguente:

Figura 1.3. – Grafico di $M = C(1 + i\tau)$ e $I(\tau) = Ci\tau$ in funzione della durata $\tau = s - t$ dell'operazione



Da quanto precede si ottiene che il fattore di montante è dato da