

# Capitolo 1

## Capitalizzazione e Attualizzazione

La prima tipologia di esercizi che viene trattata in questo eserciziaro riguarda le modalità attraverso cui un certo valore monetario disponibile al tempo  $t$ ,  $V(t)$  (anche detto capitale  $C$ ), diventa un valore monetario maggiore al tempo  $s$ ,  $V(s)$  (anche detto Montante  $M$ ). Questo problema, detto *problema di capitalizzazione*, permette di calcolare a questo ammontano gli Interessi (I) che si creano su una certa cifra impiegata in un'operazione finanziaria. La funzione che permette di ottenere il Montante conoscendo il capitale e la durata dell'operazione è detta *funzione fattore di capitalizzazione*, e si scrive  $u(t, s)$ .

Esiste anche la tipologia opposta di problemi in cui si conosce il Montante e si desidera calcolare il Capitale. Questo problema, detto di *attualizzazione* (o *sconto*) è tipico della situazione in cui un creditore ha bisogno di avere a disposizione in anticipo il credito e lo cede ad un terzo soggetto (di solito una banca), il quale in cambio gli verserà una somma inferiore al credito che viene ceduto. In questo caso la differenza tra Montante e Capitale prende il nome di Sconto e la funzione che permette di conoscere il Capitale dato il Montante e il tempo che li separa è detta *funzione fattore di attualizzazione* (o *sconto*), e si indica con  $v(t, s)$ .

Riassumendo:

$$\begin{aligned} V(s) &= V(t) \cdot u(t, s) && \rightarrow \text{operazione di capitalizzazione} \\ V(t) &= V(s) \cdot v(t, s) && \rightarrow \text{operazione di attualizzazione} \end{aligned}$$

Una proprietà basilare delle due funzioni permette di ricavare l'una conoscendo l'altra ed è la proprietà di *coniugazione*:

$$u(t, s)v(t, s) = 1 \quad \rightarrow \quad u(t, s) = \frac{1}{v(t, s)} \quad \text{e} \quad v(t, s) = \frac{1}{u(t, s)}.$$

### Regimi finanziari

Un *regime finanziario* è identificato dalla specificazione funzionale di  $u(t, s)$  o di  $v(t, s)$  e fra quelli caratterizzati da proprietà desiderabili citiamo il Regime dell'Interesse Semplice (RIS), il Regime dell'Interesse Anticipato (RIA) e il Regime dell'Interesse Composto (RIC). Calcolando la durata di un'operazione come  $s - t = \tau$ , tali regimi sono identificati nel modo seguente:

$$\begin{aligned} RIS &\rightarrow u(t, s) = 1 + i\tau \\ RIA &\rightarrow v(t, s) = 1 - d\tau \\ RIC &\rightarrow u(t, s) = (1 + i)^\tau \end{aligned}$$

dove  $i$  e  $d$  sono rispettivamente il *tasso d'interesse* e il *tasso di sconto*, legati dalla relazione:

$$i = \frac{d}{1-d} \quad ; \quad d = \frac{i}{1+i}$$

e indicanti rispettivamente l'interesse che si crea su un capitale unitario nell'unità di tempo e lo sconto da applicare su un montante unitario nell'unità di tempo.

### Tassi equivalenti

Ogni regime finanziario è caratterizzato da proprie regole per calcolare i tassi relativi ad una certa unità di tempo conoscendo almeno un tasso relativo ad un'altra unità di tempo (*tassi equivalenti*). Un'operazione finanziaria che dura  $\tau$  anni corrisponde a  $k\tau$  periodi (ad esempio 2 anni corrispondono a 4 semestri). Se indichiamo con  $i_k$  e  $d_k$  i tassi relativi ad unità di tempo lunghe un  $k$ -esimo di anno, abbiamo che:

$$\begin{aligned} RIS &\rightarrow k \cdot i_k = h \cdot i_h \\ RIA &\rightarrow k \cdot d_k = h \cdot d_h \\ RIC &\rightarrow (1 + i_k)^k = (1 + i_h)^h . \end{aligned}$$

## 1.1 Esercizi Svolti

### Esercizio 1.1

Quanto devo investire oggi in regime RIC per ottenere 4'000 € fra un anno e tre mesi sapendo che  $i_2 = 2\%$ ?

Quanto deve valere il tasso d'interesse mensile  $i_{12}$  in RIA per ottenere lo stesso montante della domanda precedente partendo dallo stesso capitale e nello stesso lasso di tempo?

Quanto a lungo dovrei investire lo stesso capitale in RIS per ottenere lo stesso montante sapendo che il tasso d'interesse trimestrale ( $i_4$ ) è pari a 1.5%?

### Svolgimento.

La prima domanda richiede che si prenda in considerazione il regime dell'interesse composto, nel quale la relazione tra le grandezze fondamentali è la seguente:

$$M = C(1 + i)^\tau.$$

In particolare il dato incognito è il Capitale, mentre sono noti Montante, tasso d'interesse e durata dell'operazione. Pertanto possiamo ricavare il valore del Capitale dalla relazione precedente, ottenendo:

$$C = M(1 + i)^{-\tau} = \frac{M}{(1 + i)^\tau}.$$

Prima di procedere alla sostituzione dei valori nella formula occorre notare che il tasso d'interesse e la durata dell'operazione che ci vengono forniti nel testo fanno riferimento ad unità di tempo diverse. Il tasso d'interesse è semestrale mentre la durata è espressa in anni e mesi. Occorre quindi rendere coerenti questi dati. Una possibilità consiste nel prendere l'unità di misura annua come riferimento. In questo modo la durata dell'operazione può essere espressa come  $\tau = 1.25$  anni, mentre occorre convertire il tasso d'interesse da semestrale ad annuo. La regola, nel RIC, è la seguente:

$$(1 + i_k)^k = (1 + i_h)^h$$

e nel nostro caso  $k = 1$  e  $h = 2$ , per cui:

$$i = (1 + i_2)^2 - 1 = (1.02)^2 - 1 = 0.0404 \simeq 4.04\%.$$

Adesso possiamo sostituire i dati nella formula:

$$C = \frac{4'000}{(1.0404)^{1.25}} = 3'806.8\text{€}.$$

La risposta alla prima domanda è uno dei dati che ci permettono di affrontare la seconda richiesta nella quale le regole sono quelle del regime dell'interesse anticipato dove le grandezza fondamentali sono legate dalla relazione:

$$M = \frac{C}{1 - d\tau}.$$

Questa volta l'incognita è il tasso d'interesse, in particolare quello mensile. La durata è la stessa della domanda precedente ma questa volta è conveniente esprimerla in mesi (15 mesi) se vogliamo ricavare il tasso di sconto nella sua versione mensile ( $d_{12}$ ). Dalla relazione precedente abbiamo che:

$$d = \left(1 - \frac{C}{M}\right) \frac{1}{\tau}$$

e se la durata è espressa in mesi avremo che:

$$d_{12} = \left(1 - \frac{3'806.8}{4'000}\right) \frac{1}{15} = 0.00322 \simeq 0.322\%$$

da cui possiamo ricavare il corrispondente tasso d'interesse mensile:

$$i_{12} = \frac{d_{12}}{1 - d_{12}} = \frac{0.00322}{1 - 0.00322} = 0.00323 \simeq 0.323\%.$$

La terza e ultima domanda riguarda il regime dell'interesse semplice e questa volta è la durata dell'operazione che deve essere calcolata. Nel RIS abbiamo che:

$$M = C(1 + i\tau)$$

da cui possiamo esplicitare la durata dell'operazione:

$$\tau = \left(\frac{M}{C} - 1\right) \frac{1}{i}.$$

Anche in questo caso dobbiamo avere ben chiaro che l'unità di misura del risultato che otterremo dipenderà dalla scelta relativa al tasso d'interesse da inserire nella formula appena scritta. Se vogliamo che il risultato sia espresso in anni ci serve il tasso d'interesse annuo. Il testo dell'esercizio ci fornisce il tasso d'interesse trimestrale, ma sappiamo che nel RIS:

$$ki_k = hi_h$$

e nel nostro caso  $k = 1$  e  $h = 4$ , quindi:

$$i = 4i_4 = 4 \cdot 0.015 = 0.06 = 6\%.$$

A questo punto possiamo sostituire i dati numerici nella formula e ottenere la durata dell'operazione:

$$\tau = \left(\frac{4'000}{3'806.8} - 1\right) \frac{1}{0.06} = 0.8459 \text{ anni,}$$

che corrisponde a circa 10.15 mesi. Si noti che avremmo potuto ricavare direttamente la durata espressa in mesi se nella formula avessimo inserito il tasso d'interesse mensile invece del tasso annuo.

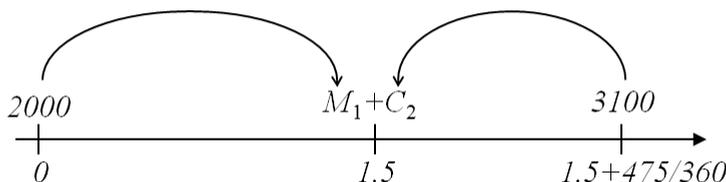
**Esercizio 1.2**

Oggi verso 2'000 € in un c/c presso la banca XY. Fra un anno e mezzo ritirerò il montante e allo stesso tempo potrò scontare un credito di 3'100 € che dovrei riscuotere 475 giorni dopo. Sapendo che in totale incasserò 5'048.35 €, quale delle seguenti condizioni applica la banca?

- A) La banca paga interessi al tasso d'interesse annuo del 3.3% in RIS e sconta al tasso d'interesse annuo del 4% in RIA.
- B) La banca paga interessi al tasso d'interesse annuo del 3.5% in RIC e sconta al tasso d'interesse annuo del 3.8% sempre in RIC.
- C) La banca paga interessi al tasso d'interesse annuo del 2.8% in RIA e sconta al tasso d'interesse annuo del 3.5% in RIS.

**Svolgimento.**

La situazione è rappresentata in questa figura:



dove è mostrato come il problema consista nel calcolare il risultato di una capitalizzazione e di una attualizzazione. Delle tre possibili condizioni una sola sarà quella che permetterà di ottenere un totale di 5'048.35 €.

Cominciamo quindi dalla possibilità A e calcoliamo il montante  $M_1$  risultante dalla capitalizzazione di 2'000 €, sapendo che il regime è il RIS:

$$M_1 = C_1(1 + i\tau) = 2'000 \cdot (1 + 0.033 \cdot 1.5) = 2'099 \text{ €}.$$

L'attualizzazione riguarda un lasso di tempo di 475 giorni ma se vogliamo continuare ad usare il tasso annuo occorre esprimere il tempo in anni, cioè in questo caso  $475/360$  anni. Alle condizioni poste dall'alternativa A in RIA abbiamo che:

$$C_2 = M_2(1 - d\tau)$$

e quindi ci serve il tasso di sconto annuo, che risulta essere:

$$d = \frac{i}{1 + i} = \frac{0.04}{1.04} = 0.03846 \simeq 3.846\%$$

e pertanto:

$$C_2 = 3'100 \left( 1 - 0.03846 \cdot \frac{475}{360} \right) = 2'942.68 \text{ €}.$$

Siamo ora in grado di calcolare il totale che si avrebbe alle condizioni dell'alternativa A:

$$Tot_A = M_1 + C_2 = 2'099 + 2'942.68 = 5'041.68 \text{€}$$

che è quindi inferiore al valore fornito nel testo.

L'alternativa B prevede l'applicazione del regime RIC sia per la capitalizzazione che per l'attualizzazione ma con tassi d'interesse annui diversi e ovviamente un tasso maggiore è previsto per l'attualizzazione. In particolare la differenza fra i due tassi è una misura del margine di guadagno della banca. Per la capitalizzazione abbiamo che:

$$M_1 = C_1(1+i)^\tau = 2'000(1.035)^{1.5} = 2'105.91 \text{€}$$

mentre per l'attualizzazione:

$$C_2 = M_2(1+i)^{-\tau} = 3'100(1.038)^{-\frac{475}{360}} = 2'951.14 \text{€}$$

e in totale:

$$Tot_B = M_1 + C_2 = 2'105.91 + 2'951.14 = 5'057.05 \text{€}$$

che supera il risultato fornito dal testo quindi occorre analizzare la terza alternativa.

Nel caso C) la capitalizzazione avviene in regime RIA mentre per l'attualizzazione si applica il RIS. Nel RIA il Montante si ricava dalla formula:

$$M_1 = \frac{C_1}{1-d\tau}$$

nella quale il tasso di sconto annuo può essere ricavato a partire dal tasso d'interesse annuo fornito dal testo:

$$d = \frac{i}{1+i} = \frac{0.028}{1.028} = 0.027237 \simeq 2.7237\%$$

e quindi:

$$M_1 = \frac{2'000}{1 - 0.027237 \cdot 1.5} = 2'085.19 \text{€}.$$

Per quanto riguarda l'attualizzazione in RIS abbiamo che:

$$C_2 = \frac{M_2}{1+it} = \frac{3'100}{1 + 0.035 \cdot \frac{475}{360}} = 2'963.16 \text{€}$$

che sommato al risultato della capitalizzazione permette di ricavare un totale di

$$Tot_C = M_1 + C_2 = 2'085.19 + 2'963.16 = 5'048.35 \text{€}$$

che è esattamente il risultato richiesto.

**Esercizio 1.3**

Oggi verso la cifra  $X$  in un c/c che corrisponde interessi calcolati al tasso d'interesse semestrale del 2.35%. Fra 8 mesi verso la cifra  $2X$  mentre fra un anno e 4 mesi la cifra  $3X$ . Fra 2 anni ritirerò il Montante complessivo. Se il mio scopo è quello di costituire esattamente 80'000€, in quale regime finanziario (tra RIS, RIA e RIC) dovrei effettuare versamenti di importo maggiore? E minore?

**Svolgimento.**

Nonostante l'ammontare di tutti e tre i versamenti sia incognito, l'esercizio consiste nel calcolo del primo versamento di ammontare  $X$ , poiché il secondo e il terzo versamento sono ricavabili direttamente da questo. Inoltre questo significa anche che è sufficiente confrontare l'ammontare del primo versamento usando i tre regimi per rispondere alla domanda, in quanto il regime a cui corrisponde un primo versamento maggiore (o minore) sarà anche quello a cui corrispondono versamenti successivi maggiori (o minori).

Occorre innanzitutto scegliere il tasso da utilizzare sapendo che se scegliamo di utilizzare il tasso semestrale dovremo poi esprimere le scadenze in trimestri, mentre se decidiamo di convertirlo, ad esempio, in tasso annuo, dovremo farlo tre volte, poiché ogni regime finanziario ha le sue regole per convertire i tassi.

Optando per quest'ultima soluzione, cominciamo calcolando il tasso d'interesse annuo in RIS:

$$i = 2i_2 = 2 \cdot 0.0235 = 0.047 = 4.7\%.$$

Si tratta ora di impostare il calcolo di tre capitalizzazioni: il primo versamento di ammontare  $X$  è capitalizzato di 2 anni; il secondo, di ammontare doppio, viene capitalizzato di 16 mesi (cioè la distanza tra la data del versamento, 8 mesi da oggi, e quella del ritiro, 2 anni da oggi); il terzo, il cui ammontare è il triplo del primo versamento, è versato a 1 anno e 4 mesi fra oggi, cioè 8 mesi prima del ritiro che avviene fra 2 anni. Il totale deve essere 80'000€ e quindi in formule:

$$\begin{aligned} X(1 + 0.047 \cdot 2) + 2X(1 + 0.047 \cdot \frac{16}{12}) + 3X(1 + 0.047 \cdot \frac{8}{12}) &= 80'000 \\ &\quad \downarrow \\ 1.094X + 2.1253X + 3.094X &= 6.313X = 80'000 \end{aligned}$$

da cui:

$$X = \frac{80'000}{6.313} = 12'671.6€.$$

In RIA ci serve il tasso di sconto annuo. Per ottenerlo dobbiamo prima ricavare il tasso di sconto semestrale, che è:

$$d_2 = \frac{i_2}{1 + i_2} = \frac{0.0235}{1.0235} = 0.02296$$

e quindi:

$$d = 2d_2 = 2 \cdot 0.02296 = 0.04592 = 4.592\%.$$

La capitalizzazione dei 3 versamenti con le regole del regime dell'interesse anticipato è:

$$\frac{X}{1 - 0.04592 \cdot 2} + \frac{2X}{1 - 0.04592 \cdot \frac{16}{12}} + \frac{3X}{1 - 0.04592 \cdot \frac{8}{12}} = 80'000$$

$$\downarrow$$

$$1.101X + 2.13X + 3.09474X = 6.32574X = 80'000$$

da cui ricaviamo a quanto ammonta il primo versamento:

$$X = \frac{80'000}{6.32574} = 12'646.74 \text{ €}.$$

Infine nel regime dell'interesse composto il tasso annuo è pari a:

$$i = (1 + i_2)^2 - 1 = (1.0235)^2 - 1 = 0.04755 = 4.755\%.$$

Impostiamo la tripla capitalizzazione:

$$X(1.04755)^2 + 2X(1.04755)^{\frac{16}{12}} + 3X(1.04755)^{\frac{8}{12}} = 80'000$$

$$\downarrow$$

$$1.1097X + 2.1278X + 3.09466X = 6.31953X = 80'000$$

che ci permette di calcolare il primo versamento nel caso in cui il regime applicato sia il RIC:

$$X = \frac{80'000}{6.31953} = 12'659.16 \text{ €}.$$

Riassumendo, i versamenti di importo maggiore sono quelli da effettuare se il regime è il RIS mentre quelli di importo minore si hanno in RIA. Da notare infine che la graduatoria resterebbe invariata se invece di 80'000 € la cifra da costituire fosse stata qualunque altro ammontare.

#### Esercizio 1.4

*L'impresa Alpha S.p.a. sconta un credito che scade fra 178 giorni e chiude un conto corrente aperto 47 mesi fa. Il credito ammonta a 8'000 € e il c/c inizialmente era stato aperto con 11'500 €, quale delle seguenti alternative frutterebbe l'entrata complessiva maggiore per l'impresa?*

- A) Sconto in RIC al tasso d'interesse semestrale del 3% e c/c in RIS con  $d_2 = 4\%$ .
- B) Sconto in RIA al tasso d'interesse trimestrale del 2.5% e c/c in RIC con  $d_3 = 1.5\%$ .
- C) Sconto in RIS al tasso di sconto annuo del 5.5% e c/c in RIC con convenzione lineare con  $i = 4.7\%$ .