Unità 1

Cenni di logica

Scopo di questa unità è quello di costruire un linguaggio sufficientemente chiaro e preciso, necessario per l'esposizione dei successivi moduli, richiamando nozioni che, almeno in parte, dovrebbero essere note dalla scuola secondaria. In questo capitolo utilizzeremo i numeri naturali ($\mathbb{N}$), interi ($\mathbb{Z}$), razionali ($\mathbb{Q}$) e reali ($\mathbb{R}$), con i quali si dovrebbe avere già familiarità e le cui proprietà verranno richiamate nel Modulo II.

1.1 *Logica proposizionale*

La logica matematica ha a che fare con le proposizioni, con gli enunciati che si utilizzano anche nel linguaggio comune e con la loro verità.
Consideriamo gli enunciati (proposizioni):

(1) Marte è un pianeta
(2) Il Sole è una stella
(3) Marte è una stella
(4) Milano è una bella città
(5) 4 è un numero pari
(6) 5 è un numero pari
(7) 5 è un numero simpatico
(8) Non usate il cellulare a lezione!
(9) $x < 5$
(10) La congettura di Goldbach è vera.

Tutte queste frasi sono proposizioni della lingua italiana, ma le proposizioni (4), (7), (8) e (9) hanno qualcosa di diverso dalle altre: per queste proposizioni non è possibile dire (o non ha senso dire) se sono vere o false, oppure, nel caso della (9), possono essere vere o false in dipendenza dal valore assunto da x.

Si noti (esempio (10)) che non è necessario che *io* o chiunque altro sappia se la frase è vera o falsa, ma è sufficiente sapere che la proposizione è sicuramente o vera o falsa.
Da un punto di vista della logica una *proposizione* è un *enunciato di cui si può dire che sia vero o falso*, cioè che assume un solo *valore di verità*. Un'espressione come quella in (9) il cui valore di verità dipende da un argomento variabile si dice *predicato*.
I predicati devono soddisfare due requisiti:

- Il *principio di non contraddizione*: un enunciato non può nello stesso tempo essere vero *e* falso.
- Il *principio del terzo escluso*: un enunciato deve essere *o* vero *o* falso.

1.1.1 *Connettivi logici*

Anche con le proposizioni della logica è possibile, come nel linguaggio comune, costruire proposizioni più complesse partendo da proposizioni elementari mediante l'uso dei cosiddetti connettivi logici:

- la *negazione*: data una proposizione p la sua negazione $\neg p$ si ottiene negando p. Ad esempio se p è l'enunciato "Marte è un pianeta" allora $\neg p$ è l'enunciato "Marte *non* è un pianeta". Ovviamente il valore di verità di $\neg p$ è l'opposto di quello di p;
- la *congiunzione*: date due proposizioni p e q la loro congiunzione che si indica con $p \wedge q$ è la proposizione "p e q". Ad esempio se p è l'enunciato "Marte è un pianeta" e q l'enunciato "Venere è un pianeta" allora $p \wedge q$ è la proposizione "Marte è un pianeta *e* Venere è un pianeta". La congiunzione di due proposizioni è vera solo se entrambe le proposizioni sono vere;
- la *disgiunzione* (inclusiva): date due proposizioni p e q la loro disgiunzione che si indica con $p \vee q$ è la proposizione "p o q (o entrambe)". Ad esempio se p è l'enunciato "Marte è un pianeta" e q l'enunciato "Venere è un pianeta" allora $p \vee q$ è la proposizione "Marte è un pianeta *o* Venere è un pianeta". La disgiunzione di due proposizioni è vera se almeno una delle due proposizioni è vera;
- il *condizionale*: date due proposizioni p e q il condizionale che si indica con $p \Rightarrow q$ è la proposizione "se p allora q" o "p è condizione necessaria per q" o "p implica q". Nel condizionale p si dice *ipotesi* e q *tesi*. Ad esempio se p è l'enunciato "Un numero è multiplo di 6" e q l'enunciato "Un numero è pari" allora $p \Rightarrow q$ è la proposizione "*Se* un numero è multiplo di 6 *allora* è pari". L'implicazione è falsa solo se l'ipotesi è vera e la tesi è falsa;
- il *bicondizionale*: date due proposizioni p e q il bicondizionale che si indica con $p \Leftrightarrow q$ è la proposizione " p se e solo se q" o "p è condizione necessaria e sufficiente per q". Ad esempio se p è l'enunciato "Un triangolo ha due lati congruenti" e q l'enunciato "Un triangolo ha due angoli congruenti" allora $p \Leftrightarrow q$ è la proposizione "Un triangolo ha due lati congruenti *se e solo se* ha

due angoli congruenti". L'implicazione è vera se e solo se le due proposizioni hanno lo stesso valore di verità.

Si faccia attenzione al fatto che alcune espressioni sono logicamente vere anche se non si "adattano" al nostro senso comune: in particolare un'implicazione è vera se l'ipotesi è falsa (*Ex falso quodlibet*): ad esempio è vera la frase "Se 2 + 2 = 5 allora Marte è un pianeta", ma anche la frase "Se 2 + 2 = 5 allora Marte è una stella".

Esempio 1.1.1.

E1) p =" 2 è un numero pari" (VERO); q ="3 è un numero dispari" (VERO). Allora
- (i) $p \vee q$ ="2 è un numero pari o 3 è un numero dispari" (V)
- (ii) $\neg p$ ="2 non è un numero pari" (F)
- (iii) $\neg p \wedge q$ ="2 non è un numero pari e 3 è un numero dispari" (F)
- (iv) $p \Rightarrow q$ ="Se 2 è un numero pari allora 3 è un numero dispari" (V)

E2) p= "Giorgio gioca a calcio" (V); q= "Andrea gioca a rugby" (F). Allora
- (i) $p \vee q$ ="Giorgio gioca a calcio o Andrea gioca a rugby" (V)
- (ii) $p \wedge \neg q$ ="Giorgio gioca a calcio e Andrea non gioca a rugby" (V)
- (iii) $p \Leftrightarrow q$ ="Giorgio gioca a calcio se e solo se Andrea gioca a rugby" (F)

1.2 *Logica dei predicati*

Abbiamo detto che una proposizione deve sempre essere vera o falsa. Un'affermazione come $x > 34$ quindi non è una proposizione, perché il suo valore di verità dipende da x. Scegliendo x in un certo insieme (da indicare) possiamo ottenere proposizioni vere o proposizioni false: è quindi una proposizione dipendente da x, e la indicheremo con $P(x)$: x si chiama *variabile* e $P(x)$ si chiama *predicato*. Ci possono ovviamente essere predicati che dipendono da due o più variabili, per esempio $x + y > 0$.
È necessario indicare in quale insieme si devono scegliere le variabili di un predicato. Per esempio l'affermazione "x è pari" ha senso se x è un numero naturale e non ne ha se è un numero decimale.
Quando assegniamo un valore alla variabile x, ad esempio $x = a$, il predicato $P(x)$ diventa una proposizione e sarà vera o falsa a seconda di a.

1.2.1 *Quantificatori*

Molto spesso nei predicati si usano espressioni del tipo

- Esiste (almeno) un x tale che valga $P(x)$.
- Per ogni x vale $P(x)$.

Queste frasi vengono formalizzate con due simboli logici, detti *quantificatori*:

- $\exists$ "esiste (almeno) un", *quantificatore esistenziale*;

- $\forall$ "per ogni", *quantificatore universale*;

Si usano anche il simbolo $\exists!$ per l'espressione "esiste uno e un solo" e $\nexists$ per l'espressione "non esiste alcun".

Esempio 1.2.1.

E1) $\forall x \in \mathbb{N} : x^2 \geq x$ che si legge "per ogni numero naturale x vale $x^2 \geq x$

E2) $\exists x \in \mathbb{N} : x^2 = x$ che si legge "esiste un numero naturale x tale che $x^2 = x$

Se si usano più quantificatori bisogna stare attenti all'ordine con cui sono scritti.

Esempio 1.2.2. Consideriamo il predicato $P(x, y)$ ="Il numero naturale x è maggiore del numero naturale y". Allora

$$\forall y \ \exists x \text{ tale che } P(x, y)$$

significa "Qualunque numero naturale y io scelga, esiste un numero naturale x maggiore di y", mentre

$$\exists x \ \forall y \text{ tale che } P(x, y)$$

vuol dire "Esiste un numero naturale x maggiore di ogni numero naturale y".
Le due affermazioni sono naturalmente molto diverse…

Osservazione 1.2.3. È necessario rendersi conto che spesso la simbologia matematica (precisa) è diversa dal linguaggio comune.
Consideriamo ad esempio l'equazione

$$x^2 = 4$$

Solitamente le soluzioni di questa equazione si rappresentano con la scrittura

$$x = \pm 2$$

Questa scrittura indica che entrambi i numeri 2 e -2 soddisfano l'equazione cioè rendono vero il predicato $x^2 = 4$. Da un punto di vista logico però la situazione si rappresenta, correttamente, nella forma:

$$x = 2 \vee x = -2$$

quindi con il connettivo logico "o".
Analogamente consideriamo la disuguaglianza

$$x^2 \neq 4$$

Solitamente le soluzioni di questa disuguaglianza si rappresentano con la scrittura

$$x \neq \pm 2$$

la cui traduzione logica è

$$x \neq 2 \wedge x \neq -2$$

cioè la scrittura $x \neq \pm 2$ indica che x deve essere "contemporaneamente" diverso da 2 e da -2.

Unità 2

Cenni di teoria (ingenua) degli insiemi

2.1 *Insiemi*

La nozione di *insieme* viene considerata come primitiva (cioè non riconducibile a concetti più elementari). Un insieme è "una collezione di oggetti, determinati e distinti, della nostra percezione o del nostro pensiero, concepiti come un tutto unico; tali oggetti si dicono elementi dell'insieme" (Cantor).
Un insieme A è ben definito quando è possibile stabilire se un oggetto x appartiene ad A (e si scrive $x \in A$) o non appartiene ad A (e si scrive $x \notin A$).
Quindi un insieme è definito:

- o elencandone gli elementi o alcuni di essi e scrivendoli tra parentesi graffe, ad esempio: $A = \{a, b, c, d\}$, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\}$ (rappresentazione per elencazione)
- o dando una proprietà caratteristica di tutti e soli gli elementi dell'insieme, ad esempio:
  - $B = \{x : x$ è una delle prime quattro lettere dell'alfabeto italiano$\}$,
  - $P = \{x : x = 2 \cdot n,\ n \in \mathbb{N}\}$, cioè P è l'insieme dei numeri pari

  (rappresentazione per caratteristica).

Un'altra utile rappresentazione degli insiemi è mediante i *diagrammi di Eulero-Venn*: un insieme viene rappresentato da una linea chiusa e i suoi elementi da punti (si veda la Figura 2.1) Due insiemi A e B si dicono uguali se hanno gli stessi elementi. Se ogni elemento dell'insieme A appartiene anche all'insieme B, si dice che A è un *sottoinsieme* di B e si indica con

$$A \subseteq B \qquad \text{oppure} \qquad B \supseteq A.$$

In simboli:

$$A \subseteq B \quad \Leftrightarrow \quad a \in A \Rightarrow a \in B.$$

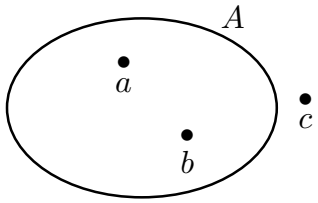

Figura 2.1. Diagramma di Eulero-Venn: $a \in A$; $b \in A$; $c \notin A$.

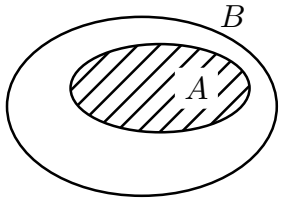

Figura 2.2. $A \subseteq B$.

Bisogna notare che A è sottoinsieme di B anche nel caso $A = B$: se $A \subseteq B$ e $A \neq B$. In questo caso, A si dice *sottoinsieme proprio* di B e si indica con

$$A \subset B \qquad \text{oppure} \qquad A \supset B.$$

In particolare, $A = B$ se e solo se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.
È comodo (ed importante) considerare anche un insieme privo di elementi: l'*insieme vuoto*, che si indica col simbolo $\emptyset$. L'insieme vuoto è sottoinsieme di ogni insieme.
Si dicono *sottoinsiemi impropri* o *banali* di A l'insieme vuoto e l'insieme A stesso.
Ogni sottoinsieme non banale di A si dice sottoinsieme *proprio* di A.
Dato un insieme A, l'insieme i cui elementi sono tutti e soli i sottoinsiemi di A si dice *insieme delle parti* di A e viene indicato con la notazione $\mathcal{P}(A)$; se A possiede n elementi, l'insieme delle parti $\mathcal{P}(A)$ possiede 2^n elementi.
Se A è un insieme finito, il numero dei suoi elementi viene detto *cardinalità* e viene indicato con $\#A$, quindi se $\#A = n$ si ha $\#\mathcal{P}(A) = 2^n$.

Esempio 2.1.1.

E1) Sia A l'insieme dei triangoli aventi due lati uguali e B l'insieme dei triangoli aventi due angoli uguali.
Allora $A = B$.

E2) Sia A l'insieme dei numeri naturali dispari e B l'insieme dei numeri naturali il cui quadrato è dispari.
Allora $A = B$.

E3) Siano $A = \{1, 3, a, \text{casa}\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5, a, b, \text{casa}, \text{albero}\}$, allora $A \subseteq B$.

E4) Sia A l'insieme dei parallelogrammi, B l'insieme dei rettangoli e C l'insieme dei quadrati.
Allora $C \subseteq B \subseteq A$.

E5) Sia $A = \{a\}$, allora $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset,\ \{a\}\}$

E6) Sia $A = \{1,\ 2,\ 3\}$, allora

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

2.2 *Operazioni con gli insiemi*

Nel seguito supporremo che tutti gli insiemi che usiamo siano sottoinsiemi di uno stesso insieme, variabile di caso in caso, che viene chiamato *insieme universo* o *insieme ambiente* e viene indicato con X.
Tale avvertenza è necessaria per evitare le *antinomie* della cosiddetta *teoria ingenua degli insiemi*[1].

Definizione 2.2.1. Dati due insiemi A e B, l'insieme costituito dagli elementi che appartengono sia ad A che a B si chiama *intersezione* di A e B e si indica con

$$A \cap B.$$

Usando i diagrammi di Eulero-Venn:

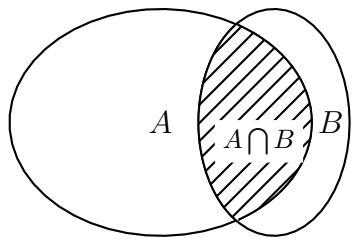

Figura 2.3. Intersezione di insiemi.

Se $A \cap B = \emptyset$, A e B si dicono *disgiunti*. L'operazione di intersezione può essere estesa al caso di più di due insiemi.

Osservazione 2.2.2. Osserviamo la similitudine tra il simbolo di intersezione e il simbolo della congiunzione logica: tale similitudine è anche concettuale. Infatti se A è l'insieme degli oggetti che soddisfano la proprietà a e B è l'insieme degli oggetti che soddisfano la proprietà b, allora $A \cap B$ è formato dagli elementi che soddisfano sia la proprietà a che la proprietà b, cioè la proprietà $a \wedge b$.

[1] Lo studente curioso può cercare "Paradosso di Russell".

Definizione 2.2.3. Dati due insiemi A e B, l'insieme costituito dagli elementi che appartengono o ad A o a B si chiama *unione* di A e B e si indica con

$$A \cup B.$$

Usando i diagrammi di Eulero-Venn:

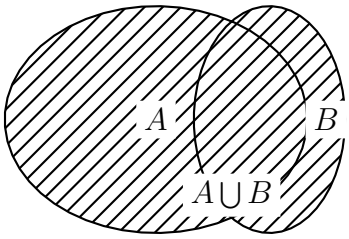

Figura 2.4. Unione di insiemi.

L'operazione di unione può essere facilmente estesa al caso di più di due insiemi.

Osservazione 2.2.4. Osserviamo la similitudine tra il simbolo di unione e il simbolo della disgiunzione logica: tale similitudine è anche concettuale. Infatti se A è l'insieme degli oggetti che soddisfano la proprietà a e B è l'insieme degli oggetti che soddisfano la proprietà b, allora $A \cup B$ è formato dagli elementi che soddisfano la proprietà a oppure la proprietà b (o entrambe), cioè la proprietà $a \vee b$.

Definizione 2.2.5. Dati due insiemi A e B, l'insieme degli elementi di A che non appartengono a B si chiama *differenza* A meno B, e si indica con

$$A \setminus B.$$

Usando i diagrammi di Eulero-Venn:

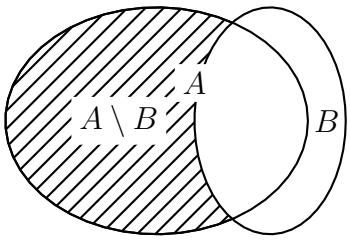

Figura 2.5. Differenza di insiemi.